INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 20. November 1956

Postverlagsort Berlin

Preis DM 11,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstraße 16 (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 27901

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

Inhalt:

Seite

Grammel, R., und *H. Ziegler*, Der kardanisch gelagerte schnelle symmetrische Kreisel mit Lagerreibung. Mit 8 Abbildungen 351

Trostel, R., Instationäre Wärmespannungen in einer Hohlkugel. Mit 4 Abbildungen 373

Volterra, E., The Equations of Motion for Curved and Twisted Elastic Bars deduced by the use of the „Method of Internal Constraints" 392

Zoller, K., Über das *Grammel*sche Verfahren bei Eigenschwingungsaufgaben. Mit 4 Abbildungen 401

Paslay, P. R. and *A. Slibar*, The Motion of Automobiles in Unbanked Curves . 412

INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1956

Der kardanisch gelagerte schnelle symmetrische Kreisel mit Lagerreibung

Von **R. Grammel** und **H. Ziegler**

1. Einleitung. Der Einfluß der Reibung in den Lagern eines kardanisch aufgehängten Kreisels auf seine Bewegung und also ihre Abweichung von der idealen Bewegung ohne Reibung ist bis jetzt nur unvollständig abgeschätzt worden. Die bisherigen einfachen Ergebnisse[1] (Abnahme der Eigendrehgeschwindigkeit, Zunahme der Präzessionsgeschwindigkeit und Sinken des Schwerpunkts beim schweren Kreisel) lassen sich in dieser Allgemeinheit nur zum Teil aufrechterhalten und müssen durch weniger einfache und in einigen Fällen sogar überraschende Ergebnisse ersetzt werden, wenn man bei einem Kardangehänge, wie es in Abb. 1 für einen schweren Kreisel schematisch dargestellt ist, die bisher unbeachtete Koppelung zwischen der Reibung in den inneren Kardanlagern *AA* und in den äußeren Kardanlagern *CC* berücksichtigt und die bislang stets vernachlässigte Reibung in den mittleren Kardanlagern *BB* hinzunimmt.

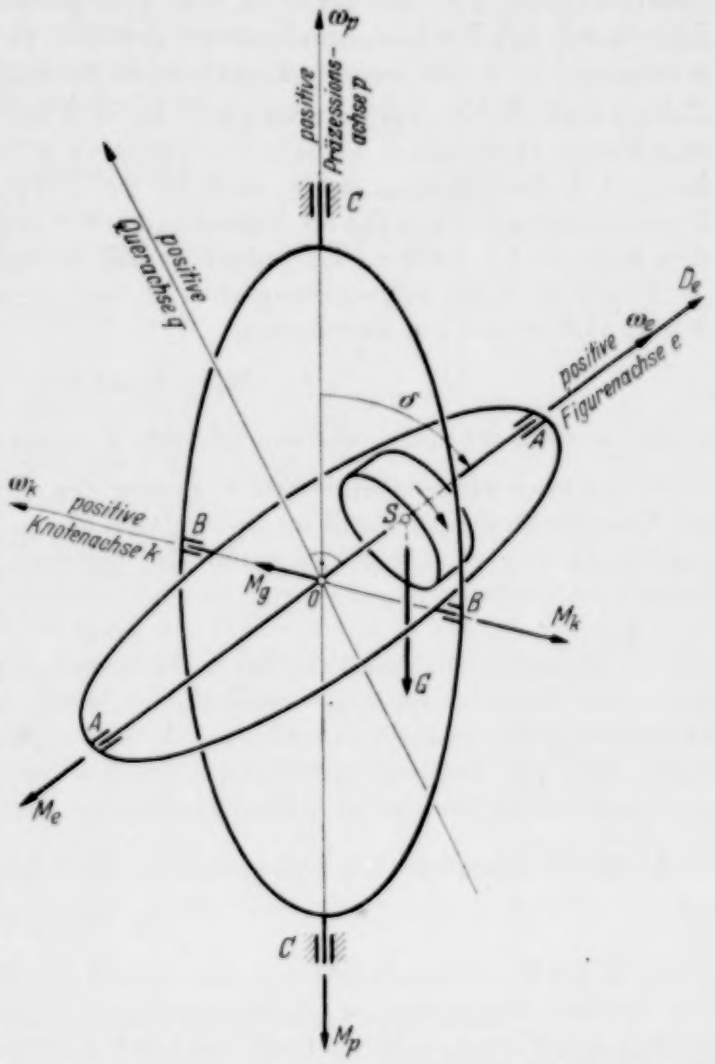

Abb. 1. Rechtsdrehender Kreisel im Kardangehänge mit den Achsen *AA*, *BB*, *CC* und den Reibungsmomenten M_e, M_k und M_p (bei positiven Drehungen ω_e, ω_k, ω_p), dem Schweremoment M_g und dem Eigendrehimpuls D_e.

Obwohl es der Rechnung schwerlich gelingen kann, den Einfluß der Reibung quantitativ genau zu erfassen, so wollen wir doch in der folgenden Untersuchung das Problem erneut aufgreifen, mit dem Ziel, die Mannigfaltigkeit des Ablaufs der Bewegung wenigstens qualitativ vollständig wiederzugeben, und es somit im Rahmen bestimmter Voraussetzungen theoretisch zu einem gewissen Abschluß bringen.

Wir beschränken uns hier auf den schnellen symmetrischen Kreisel mit lotrechter äußerer Achse *CC* des als masselos und starr angesehenen Kardangehänges, machen also die in der Theorie des schnellen Kreisels üblichen Vereinfachungen (wenn auch später ein wenig erweitert) und vernachlässigen die Drehimpulsanteile der Kardanringe.

Die physikalische Art der Reibung in den Lagern, also die mathematische Form des Reibungsgesetzes, lassen wir so lange wie möglich offen, da ein wesentliches Ergebnis unserer Untersuchung für alle Reibungsgesetze gültig ist und das allgemeine Verhalten des Kreisels auch ohne Kenntnis des speziellen Reibungsgesetzes ziemlich weit verfolgt werden kann. Wo wir ein Reibungsgesetz benötigen, um explizit rechnen zu können, beschränken wir uns im wesentlichen auf zwei Typen von solchen Gesetzen, welche Idealisierungen der wirklichen Verhältnisse sind, nämlich eines für trockene Reibung und ein ziemlich allgemeines für flüssige Reibung. Die mit beiden Gesetzen erhaltenen Aussagen sind durch Versuche qualitativ bestätigt worden (Ziff. **11**).

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. I, S. 111, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1950.

Ganz unberücksichtigt lassen wir die kaum genau zu überblickende Abhängigkeit der Reibungsmomente von den Lagerkräften. Da beim schnellen Kreisel der Schwerpunkt nur schwach beschleunigt wird, so ändern sich die Kräfte in den Lagern BB und CC nicht merklich, wogegen das Reibungsmoment in den Lagern AA durchaus vom Winkel δ (Abb. 1) abhängen könnte. Das Gegenmoment des Kreisels gegen das Reibungsmoment in den Lagern AA erzeugt in den Lagern CC ein Paar von seitlichen Kräften, deren Stärke vom Winkel δ abhängt und also das Reibungsmoment in den Lagern CC in einer von δ abhängigen Weise beeinflussen kann. Auch von diesem Einfluß sehen wir ab.

2. Bezeichnungen. Wir wählen die Bezeichnungen wie in Abb. 1, benennen also die Figurenachse e, die (waagerechte) Knotenachse k, die (lotrechte) Präzessionsachse p und die (in der lotrechten Querebene durch Figuren- und Präzessionsachse gelegene und zur Figuren- und Knotenachse senkrechte) Querachse q in üblicher Weise. Abb. 1 gibt auch die positiven Richtungen dieser vier Achsen an, und wir setzen fest, daß der Schwerpunkt S des Kreiselkörpers, wenn er nicht mit dem Kardanmittelpunkt O zusammenfällt (wie beim schwerelosen, meistens „kräftefrei" genannten Kreisel) auf der positiven Figurenachse liegt (sog. „schwerer" Kreisel).

Die Zahlenwerte der Eigendrehgeschwindigkeit ω_e und der Präzessionsgeschwindigkeit ω_p (mit der sich also die Querebene und die Knotenachse um die Lotlinie drehen) zählen wir beim rechtsdrehenden Kreisel (er ist in Abb. 1 dargestellt) positiv, wenn die zugehörigen Drehvektoren, jeweils mit der Rechtsschraubenregel gebildet, in der positiven Figurenachse und positiven Präzessionsachse liegen, beim linksdrehenden Kreisel, wenn sie in den negativen Achsen liegen; den Zahlenwert der Nickgeschwindigkeit $\omega_k \equiv \dot{\delta}$ zählen wir bei beiden Kreiseln positiv, wenn der zugehörige Drehvektor dann in der positiven Knotenachse liegt. Für die Zahlenwerte der zugehörigen Komponenten D_e, D_p und D_k des Drehimpulsvektors sollen die gleichen Vorzeichen-Festsetzungen gelten, für die Zahlenwerte der zugehörigen Reibungsmomente M_e, M_p und M_k in den Achsen AA, CC und BB jedoch gerade die umgekehrte Festsetzung.

Der Vektor des Schweremoments M_g liegt, wenn von Null verschieden, stets in der positiven Knotenachse und hat den Betrag

$$M_g = Q \sin\delta \qquad \text{mit} \qquad Q = s\,G\,, \tag{2,1}$$

wobei $s = \overline{OS}$ ist und G das Gewicht des Kreiselkörpers bedeutet.

Wenn man die so definierten Vektoren des rechtsdrehenden Kreisels an einer Ebene parallel zur Querebene spiegelt und im Spiegelbild die Rechtsschraubenregel durch die Linksschraubenregel ersetzt, so zeigt das Spiegelbild den gleichen Kreisel in Linksdrehung und mit umgekehrter Präzessionsdrehung ω_p, aber gleicher Nickdrehung ω_k. Weil die *Euler*sche Vektorgleichung der Bewegung invariant gegen Vertauschen jener beiden Regeln ist, so dürfen wir uns im folgenden durchweg auf die Behandlung des rechtsdrehenden Kreisels beschränken: alle Ergebnisse gelten dann ohne weiteres auch für den linksdrehenden, wenn wir die für beide Kreisel entgegengesetzte Festsetzung des positiven Zahlenwertes von ω_p beachten und beim schweren Kreisel alle Aussagen über das Steigen und Sinken des Schwerpunkts unverändert beibehalten. Wie werden dies später auch noch an Hand der Bewegungsgleichungen bestätigen.

3. Das Kräftespiel. Wir beabsichtigen, die Vektorgleichung der Bewegung des Kreisels

$$\dot{\mathfrak{D}} + [\mathfrak{o}\,\mathfrak{D}] = \mathfrak{M}\,, \tag{3,1}$$

worin $\mathfrak{D}$ der Drehimpulsvektor, $\mathfrak{o}$ der Vektor mit den Komponenten ω_p und ω_k und $\mathfrak{M}$ der Vektor des äußeren Momentes ist, in dem rechtwinkligen, die Drehungen ω_p und ω_k mitmachenden System aus Figurenachse e, Knotenachse k und Querachse q in Komponeneten zu zerspalten und müssen also vor allem die drei Komponenten M_e, M_k (außer M_g) und M_q von $\mathfrak{M}$ in diesem System finden.

Die feste Umgebung übt mittels der Lager CC ein Moment auf den äußeren Kardanring aus, dessen Vektor in eine waagerechte Komponente M_1 in der Querebene (Abb. 2), eine Komponente M_2 senkrecht zur Querebene, also in der Knotenachse, und eine lotrechte Komponente M_3 zerlegt werden darf. Die Komponente M_1 überträgt sich über die Lager BB und AA auf den Kreiselkörper und zerspaltet sich dort in eine Komponente M_1' in der Querachse und in einen ersten Anteil M_1'' zu dem Reibungsmoment M_e in den Lagern AA. Die Komponente M_2 ist identisch mit dem Reibungsmoment M_k in den Lagern BB. Die Komponente M_3 ist identisch mit dem Reibungsmoment M_p in den Lagern CC und überträgt und zerspaltet sich in eine Kom-

ponente M_3' in der Querachse und in einen zweiten Anteil M_3'' zu dem Reibungsmoment M_e in den Lagern AA. Wenn wir zu den Vorzeichenregeln für M_e, M_p und M_k noch die Festsetzung hinzufügen, daß der Zahlenwert von M_q positiv sein soll, wenn dieser Vektor in der negativen Querachse liegt, so gilt also

$$\left.\begin{aligned} M_e &= M_1 \sin\delta + M_p \cos\delta\,, \\ M_q &= M_p \sin\delta - M_1 \cos\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,2}$$

Die drei Reibungsmomente M_e, M_p und M_k bedeuten, soweit Bewegungen ω_e, ω_p und ω_k überhaupt vorhanden sind, die Gleitreibungsmomente und sind als solche durch die Lagerbeschaffenheit bestimmt (und voraussetzungsgemäß nur durch sie, unabhängig von der Raumstellung des Kreisels). Man sieht sie bei „flüssiger" Reibung als gegebene stetige Funktionen von ω_e bzw. ω_p bzw. ω_k an, die gleichzeitig mit diesen Größen verschwinden, bei „trockener" Reibung als vorgeschriebene Festwerte, bei „gemischter" Reibung, die wir aber im folgenden nicht behandeln, als gegebene Funktionen von ω_e bzw. ω_p bzw. ω_k, die beim Verschwinden dieser Drehungen gegen von Null verschiedene Festwerte gehen.

Die trockene Reibung (und auch die gemischte) kann so stark sein, daß die eine oder beide Drehungen ω_p und ω_k gar nicht möglich sind oder im Laufe der Bewegung auf Null abgebremst werden. Wir sprechen dann von Sperrung der Figurenachse oder wenigstens einer ihrer Bewegungskomponenten; und in diesem Falle gehen die Gleitreibungsmomente M_p und M_k in die Haftreibungsmomente M_p^* und M_k^* über, von denen man nur weiß, daß sie zwischen Null und einem Höchstwert liegen, den man mit den Gleitreibungsmomenten M_p und M_k anzusetzen pflegt.

Die Reibungsmomente müssen gemäß unseren Vorzeichenregeln den Forderungen

$$M_e \gtrless 0\,, \qquad \operatorname{sgn} M_p = \operatorname{sgn}\omega_p\,, \qquad \operatorname{sgn} M_k = \operatorname{sgn}\omega_k \tag{3,3}$$

genügen; und natürlich muß M_e so klein sein, daß der Charakter des Kreisels als eines schnellen Kreisels während der untersuchten Bewegungsdauer nicht verloren geht, geschweige denn, daß die Drehung ω_e überhaupt gesperrt würde.

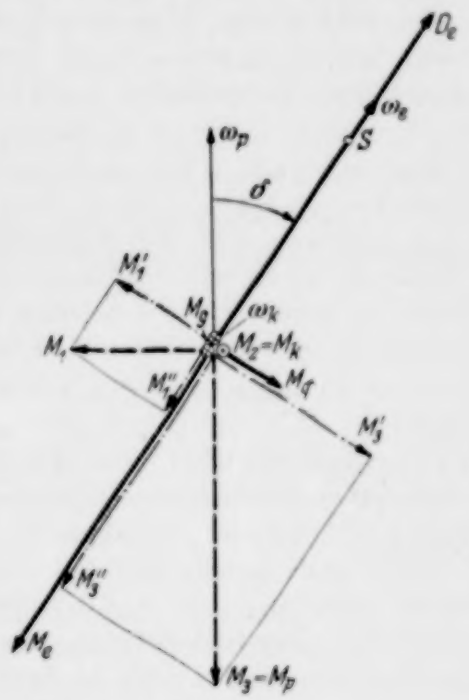

Abb. 2. Momentenzerlegung in der Querebene und senkrecht zu ihr.

4. Die möglichen Typen der Bewegung. Wenn man in erster Näherung für den schnellen Kreisel den gesamten Drehimpuls $\mathfrak{D}$, wie üblich, mit dem Eigendrehimpuls D_e verwechselt (da dieser beim schnellen Kreisel die von ω_p und ω_k herrührenden Anteile von $\mathfrak{D}$ weit übertönen soll) und jetzt zu den Momentkomponenten M_e, M_k und M_q noch das Schweremoment M_g (2,1) hinzunimmt, so zerspaltet sich die Vektorgleichung (3,1) in die drei Komponentengleichungen

$$\dot{D}_e = -M_e\,, \tag{4,1}$$

$$D_e\,\omega_p \sin\delta = Q\sin\delta - M_k\,, \tag{4,2}$$

$$D_e\,\omega_k = M_q \tag{4,3}$$

mit dem Wert von M_q, der aus (3,2) durch Elimination von M_1 folgt; man findet

$$M_q \sin\delta = M_p - M_e\cos\delta\,. \tag{4,4}$$

Aus diesen Gleichungen kann man einige allgemeine Folgerungen ziehen, die noch von jedem speziellen Reibungsgesetz unabhängig sind. Wir stellen dabei vor allem fest, daß diese Gleichungen sich nicht ändern, wenn man gleichzeitig D_e und ω_p gegen $-D_e$ und $-\omega_p$ vertauscht, ω_k aber beläßt, da dann auch M_e und M_p, aber nicht M_k das Vorzeichen wechseln, und damit ist nochmals bestätigt, daß man sich weiterhin auf den rechtsdrehenden Kreisel beschränken darf und damit auch das Verhalten des linksdrehenden kennt.

Die Gleichung (4,1) drückt die erwartete Tatsache aus, daß der Eigendrehimpuls D_e und mit ihm die Eigendrehgeschwindigkeit ω_e fortwährend abnehmen, wenn ein widerstehendes Moment M_e vorhanden ist.

Bei den Gleichungen (4,2) und (4,3) müssen wir offensichtlich weiterhin die beiden Fälle $\sin\delta = 0$ ausscheiden, also erstens den sogenannten aufrechten oder stehenden Kreisel $\delta = 0$ — sein Verhalten ist ein Stabilitätsproblem, das wir hier nicht behandeln wollen — und zweitens den hängenden Kreisel $\delta = 180°$ — dieser Fall ist trival. Aber auch ein gewisser Bereich in der Umgebung von $\delta = 0$ und von $\delta = 180°$ wird von unseren Näherungsgleichungen nicht erfaßt. Wie nämlich schon beim reibungslosen Kreisel unsere Gleichungen die Nutationen der in Wirklichkeit i. a. nicht streng regulären, sondern nur pseudoregulären Präzession $\omega_p = Q/D_e$ nicht enthalten, so verwischen sie auch bei Reibung die möglichen Nutationen der nunmehr (wenn $\omega_k \neq 0$) als pseudoquasiregulär zu bezeichnenden Präzession und können also insbesondere auch die Nutationen, die in der Umgebung von $\delta = 0$ und $\delta = 180°$ neben der Eigendrehung ω_e allein noch möglicherweise vorhanden sind, nicht wiedergeben. Wir wollen ein für alle Male verabreden, daß wir mit der Aussage, die positive Figurenachse erreiche die Stellungen $\delta = 0$ oder $\delta = 180°$, oder der Schwerpunkt steige bis zum höchsten oder sinke bis zum tiefsten Punkt, stets ausdrücken wollen, daß der kleine Bereich um $\delta = 0$ oder $\delta = 180°$ erreicht werde, der beim hinreichend schnellen Kreisel auch hinreichend eng und nicht oder kaum mehr wahrnehmbar ist, in welchem die Bewegung der Figurenachse also nur noch aus Nutationen besteht, und dessen Einzelheiten unsere Theorie nicht mehr erfassen kann.

Um nun weiter in möglichst allgemeiner Weise aus Gleichung (4,2) auf die Präzession und vermittels (4,3) sowie (4,4) auf die Nickbewegung zu schließen (wobei natürlich Koppelungen zwischen diesen Gleichungen zu beachten sind), sehen wir im Falle trockener Reibung zunächst von Sperrungen ab (mit denen wir uns erst in Ziff. **7** und **8** beschäftigen werden). Im Falle flüssiger Reibung lassen wir alle Reibungsgesetze zu, bei denen M_e und M_p monotone Funktionen von ω_e bzw. ω_p sind; ferner schließen wir reibungsfreie Lager (die ja in Wirklichkeit auch nicht vorkommen) in dieser Ziffer noch aus.

Um zunächst den Fall des Kreisels ohne Schweremoment vorwegzunehmen, beachten wir, daß nach (4,2) mit $Q = 0$ die Vorzeichen von ω_p einerseits und M_k, mithin auch ω_k andererseits entgegengesetzt sind. Der Kreisel führt also bei steigendem Schwerpunkt eine positive, bei sinkendem eine negative Präzession aus. Im ersten Falle ($\omega_k < 0$) ist mit ω_p auch M_p positiv und nach (4,3) mit ω_k auch M_q negativ, zufolge (4,4) also $\delta < 90°$. Im zweiten Fall ($\omega_k > 0$) schließt man analog auf $\delta > 90°$ und unter der Annahme, daß der Schwerpunkt weder steigt noch sinkt ($\omega_k = 0$), auf $\delta = 90°$. Hiernach (und unter dem Vorbehalt, daß sich infolge von Sperrungen noch Modifikationen ergeben können) steigt oder sinkt der Schwerpunkt unter dem Einfluß der Reibung bis in die höchste bzw. tiefste Lage, je nachdem er anfänglich höher oder tiefer liegt als der Drehpunkt, und nur bei anfänglich waagerechter Figurenachse bleibt diese stehen.

Nachdem so der Kreisel ohne Schweremoment erledigt ist, setzen wir weiterhin $Q > 0$ voraus (um erst wieder in Ziff. **9** auf den Kreisel ohne Schweremoment zurückzukommen). Aus Gleichung (4,2) folgt dann, daß für $M_k = 0$ die Präzessionsgeschwindigkeit ω_p mit derjenigen

$$\bar{\omega}_p = \frac{Q}{D_e} > 0 \tag{4,5}$$

des durchweg reibungsfreien Kreisels mit dem gleichen momentanen Eigendrehimpuls D_e übereinstimmt. Diese ist nach unserer Verabredung positiv, und da D_e infolge der Reibung in den inneren Kardanlagern AA allmählich abnimmt, wächst $\bar{\omega}_p$ in jedem Falle monoton an. Ferner folgt aus (4,2) und (4,5), daß für $\omega_k < 0$, also $M_k < 0$ die Präzessionsgeschwindigkeit $\omega_p > \bar{\omega}_p$ und für $\omega_k > 0$, also $M_k > 0$ umgekehrt $\omega_p < \bar{\omega}_p$ ist. Die (positive) Präzession erfolgt also unter dem Einfluß der Reibung in den Lagern BB bei steigendem Schwerpunkt rascher, bei sinkendem langsamer als beim reibungsfreien Kreisel mit dem gleichen Eigendrehimpuls. Damit ist insbesondere Präzessionsumkehr oder überhaupt negative Präzession von Anfang an nur bei sinkendem Schwerpunkt möglich.

Wir führen jetzt mit $M_p > 0$ das Reibungsmoment in den äußeren Kardanlagern CC ein, das zur Präzessionsgeschwindigkeit $\bar{\omega}_p$ (4,5) gehört, und nehmen erstens an, daß in einem bestimmten Augenblick

$$M_e \cos\delta < \bar{M}_p \tag{4,6}$$

sei. Dies trifft stets zu, wenn der Schwerpunkt tiefer liegt als der Drehpunkt, bei höher liegendem Schwerpunkt dagegen nur für genügend kleine Werte von M_e. Nimmt man dann an, daß der Schwerpunkt nicht sinke, d. h. daß $\omega_k \leq 0$ sei, dann ist auf Grund unserer Voraussetzungen

über die (trockene oder flüssige) Reibung wegen $\omega_p \geq \bar{\omega}_p$ auch $M_p \geq \bar{M}_p$, also nach (4,6)

$$M_e \cos\delta < M_p\,. \tag{4,7}$$

Aus (4,4) folgt daher $M_q > 0$ und damit aus (4,3) $\omega_k > 0$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Der Schwerpunkt sinkt also momentan, und zwar sowohl beim rechts- als auch beim linksdrehenden Kreisel. Da dabei $\cos\delta$ abnimmt, während M_e nicht zu- und nach (4,5) ω_p zu-, mithin $\bar{M}_p$ nicht abnimmt, so bleibt die Ungleichung (4,6) bestehen. Es ist daher klar, daß der Schwerpunkt (eventuelle Sperrungen stets vorbehalten) bis in die tiefste Lage sinkt (wobei die Präzession mindestens in der letzten Bewegungsphase möglicherweise negativ ist).

Nimmt man zweitens an, daß in einem bestimmten Augenblick

$$M_e \cos\delta = \bar{M}_p \tag{4,8}$$

sei, was nur bei hochliegendem Schwerpunkt und nur unter der Voraussetzung $M_e > \bar{M}_p$ möglich ist, dann führt die gleiche Schlußweise unter der Voraussetzung $\omega_k < 0$ auf das Ergebnis $\omega_k \geq 0$ und unter der Voraussetzung $\omega_k > 0$ auf $\omega_k \leq 0$. Die Annahme, daß der Schwerpunkt steige oder sinke, ist damit als unzutreffend erwiesen, und es muß momentan $\omega_k = 0$ sein. Bei trockener Reibung behalten M_e und $\bar{M}_p$ ihre Werte bei, und es entsteht also keine Nickbewegung. Dieser Zustand ist aber natürlich labil — man denke an die möglicherweise vorhandenen Nutationen. Bei Flüssigkeitsreibung dagegen nimmt M_e ab und $\bar{M}_p$ zu; die Gleichung (4,8) geht dann in die Ungleichung (4,6) über, und der Schwerpunkt sinkt (falls nicht neue Sperrungen eintreten) wieder bis zur tiefsten Lage.

Setzt man drittens voraus, daß in einem bestimmten Augenblick

$$M_e \cos\delta > \bar{M}_p \tag{4,9}$$

sei, was wiederum nur bei hochliegendem Schwerpunkt und unter der Voraussetzung $M_e > \bar{M}_p$ zutreffen kann, dann folgt aus der Annahme $\omega_k \geq 0$ wegen $\omega_p \leq \bar{\omega}_p$ bzw. $M_p \leq \bar{M}_p$ nach (4,9)

$$M_e \cos\delta > M_p\,, \tag{4.10}$$

und da hieraus nach (4,4) auf $M_q < 0$ und daher mit (4,3) im Widerspruch zu unserer Annahme auf $\omega_k < 0$ geschlossen werden muß, kann der Schwerpunkt momentan nur steigen, und zwar wiederum sowohl beim rechts- als auch beim linksdrehenden Kreisel. Bei trockener Reibung behalten M_e und $\bar{M}_p$ ihre Werte bei; der Schwerpunkt steigt also bis in die höchste Lage. Bei flüssiger Reibung tut er dies, da M_e ab- und $\bar{M}_p$ zunimmt, nur unter der Voraussetzung, daß die Ungleichung (4,9) nicht vorher in die Gleichung (4,8) übergeht. Trifft dies aber zu, dann geht dieser Fall in den vorangehenden und damit das Steigen des Schwerpunkts vor dem Erreichen der höchsten Lage in ein Sinken bis zur tiefsten über.

Mit diesen Ergebnissen ist der Bewegungsverlauf im Falle flüssiger Reibung qualitativ völlig beschrieben, im Falle trockener Reibung bis auf etwaige Sperrungen. Im Hinblick auf die nun folgende Ausarbeitung der Einzelheiten sei nur noch vermerkt, daß der Winkel δ_q, welcher die Bereiche momentanen Sinkens und Steigens des Schwerpunktes trennt, nach (4,8) durch

$$\cos\delta_q = \frac{\bar{M}_p}{M_e} \tag{4,11}$$

gegeben, also nur für $M_e > \bar{M}_p$ reell, dann aber spitz ist. Da für diesen Grenzwinkel $\omega_k = 0$ und daher $\omega_p = \bar{\omega}_p$ ist, kann man übrigens statt (4,11) auch

$$\cos\delta_q = \frac{M_p}{M_e} \tag{4,12}$$

schreiben.

5. Die Bewegung bei flüssiger Reibung. Der einfachste Ansatz für flüssige Reibung lautet mit drei nichtnegativen Festwerten ε_e, ε_k und ε_p

$$M_e = \varepsilon_e\,\omega_e\,, \qquad M_k = \varepsilon_k\,\omega_k\,, \qquad M_p = \varepsilon_p\,\omega_p\,. \tag{5,1}$$

Er erfüllt die Forderungen (3,3). Mit diesen Werten und der Drehmasse (dem Trägheitsmoment) A des Kreiselkörpers um seine Figurenachse, also $D_e = A\,\omega_e$ gehen die Bewegungsgleichungen

(4,1) bis (4,3) samt (4,4) über in

$$\dot{D}_e = -\frac{\varepsilon_e}{A} D_e , \tag{5,2}$$

$$D_e \omega_p \sin\delta = Q \sin\delta - \varepsilon_k \omega_k , \tag{5,3}$$

$$D_e \omega_k \sin\delta = \varepsilon_p \omega_p - \frac{\varepsilon_e}{A} D_e \cos\delta . \tag{5,4}$$

Es ist zweckmäßig, die letzten beiden Gleichungen umzuformen mit der Kote

$$u = \cos\delta \tag{5,5}$$

der sogenannten Kreiselspitze, als welche wir weiterhin einfach den Schwerpunkt ansehen wollen, da wir den Längenmaßstab stets so wählen können, daß $s = \overline{OS} = 1$ ist; wegen $\dot{u} = -\dot{\delta}\sin\delta = -\omega_k \sin\delta$ gehen (5,3) und (5,4) dann über in

$$D_e \omega_p (1-u^2) = Q(1-u^2) + \varepsilon_k \dot{u} , \tag{5,6}$$

$$D_e \dot{u} = \frac{\varepsilon_e}{A} D_e u - \varepsilon_p \omega_p , \tag{5,7}$$

und wir erinnern nochmals daran, daß diese Gleichungen für $\sin\delta = 0$, also $u = \pm 1$, keine exakten Aussagen mehr machen können, aber immerhin bis in die allernächste Nähe von $u = \pm 1$ gelten.

Die Integration von (5,2) ist zwar stets explizit möglich, diejenige der beiden anderen Gleichungen (5,3), (5,4) bzw. (5,6), (5,7) mit dem Wert D_e aus (5,2) scheint es aber in geschlossener Form nicht zu sein, wenn ε_e, ε_k und ε_p alle drei von Null verschieden sind. Wir erledigen daher zuerst drei Sonderfälle.

a) Der erste Sonderfall $\varepsilon_e = 0$ hat eine praktische Bedeutung für viele Kreiselapparate, z. B. für kardanisch aufgehängte Lotkreisel und künstliche Horizonte, falls diese mit Synchronmotoren angetrieben werden, deren Ständer auf dem inneren Kardanring aufsitzt. In diesem Fall ist dauernd $M_e = 0$, also $\varepsilon_e = 0$, da das Reibungsmoment in den Lagern AA durch das Gegenmoment des Motors aufgehoben wird, und dann behält D_e dauernd seinen anfänglichen (stationären) Wert D_0 bei. Die Gleichungen (5,6) und (5,7) lauten jetzt

$$D_0 \omega_p (1-u^2) = Q(1-u^2) + \varepsilon_k \dot{u} , \tag{5,8}$$

$$D_0 \dot{u} = -\varepsilon_p \omega_p . \tag{5,9}$$

Die Elimination von ω_p führt auf

$$[D_0^2 (1-u^2) + \varepsilon_k \varepsilon_p]\,\dot{u} + \varepsilon_p Q (1-u^2) = 0 . \tag{5,10}$$

Diese Gleichung hat die zu $u = u_0$ für $t = 0$ passende Lösung

$$\varepsilon_p Q t = D_0^2 (u_0 - u) - \frac{1}{2}\varepsilon_k \varepsilon_p \ln\frac{(1+u)(1-u_0)}{(1-u)(1+u_0)} . \tag{5,11}$$

Weil gemäß (5,10) für $\varepsilon_p > 0$ und $|u| < 1$ dauernd $\dot{u} < 0$ ist, so sinkt der Schwerpunkt in diesem Sonderfall von jeder Anfangskote u_0 (< 1) aus dauernd [im Einklang mit Ziff. 4, da ja die Bedingung (4,7) stets erfüllt ist]; er erreicht, falls auch $\varepsilon_k > 0$ ist, seine tiefste Lage $u = -1$ erst mit $t = \infty$, also nur asymtotisch, dagegen, falls $\varepsilon_k = 0$ ist, nach der endlichen Zeit

$$t_{-1} = \frac{(1+u_0) D_0^2}{\varepsilon_p Q} . \tag{5,12}$$

Im Falle $\varepsilon_p = 0$ bleibt der Schwerpunkt dauernd in seiner Anfangshöhe u_0 [wiederum im Einklang mit Ziff. 4, da jetzt dauernd (4,8) erfüllt ist], auch dann, wenn $\varepsilon_k > 0$ ist, und zwar zweifellos jetzt stabil.

Die Präzessionsgeschwindigkeit wird nach (5,9) mit dem Wert $\dot{u}$ aus (5,10)

$$\omega_p = \frac{1-u^2}{1-u^2+(\varepsilon_k \varepsilon_p / D_0^2)} \frac{Q}{D_0} . \tag{5,13}$$

Falls $\varepsilon_k \varepsilon_p > 0$ ist, nimmt ω_p, wie man hieraus leicht abliest, von einer etwaigen positiven Anfangskote u_0 aus zunächst zu, erreicht für die waagerechte Lage $u = 0$ der Figurenachse seinen Höchstwert

$$\omega_{p\,max} = \frac{D_0 Q}{D_0^2 + \varepsilon_k \varepsilon_p} \tag{5,14}$$

und nimmt dann — oder überhaupt von Anfang an, wenn $u_0 < 0$ war — monoton ab bis zu seinem asymptotischen Wert Null für die tiefste Schwerpunktslage $u = -1$. Falls jedoch ε_k oder ε_p oder beide verschwinden, so behält ω_p dauernd seinen Wert Q/D_0 bei, der ohne Reibung vorhanden wäre.

b) Der nächstwichtige Sonderfall $\varepsilon_k = 0$ ist für schnelle Kreisel mit großem Schweremoment M_g, also großem Q, bedeutsam, weil bei solchen in der Regel die Präzessionsgeschwindigkeit ω_p zwar klein gegen ω_e, aber groß gegen ω_k ist, so daß das Reibungsmoment M_k nicht wesentlich sein mag. Wir dürfen hier $\varepsilon_e > 0$ voraussetzen (da der Fall $\varepsilon_e = 0$ schon erledigt ist) und wollen außerdem $\varepsilon_p > 0$ voraussetzen (da wir den Fall $\varepsilon_e > 0$, $\varepsilon_p = 0$ später allgemeiner mitbehandeln werden).

Die Gleichung (5,2) kann man für sich integrieren. Man führt dabei zweckmäßig ein neues Zeitmaß ein, nämlich die „Exponentialzeit“

$$T = e^{\varepsilon_e t/A}, \tag{5,15}$$

welche mit t monoton geht, und erhält dann mit dem Anfangswert $D_e = D_0$ für $t = 0$, also $T = 1$ einfach

$$D_e = \frac{D_0}{T} \tag{5,16}$$

und somit die erwartete monotone Abnahme des Eigendrehimpulses.

Mit diesem Wert von D_e und wegen $\varepsilon_k = 0$ folgt aus (5,3)

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\, T, \tag{5,17}$$

also eine monotone Zunahme der Präzessionsgeschwindigkeit.

Diese Werte von D_e und ω_p und der aus (5,15) folgende Wert

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon_e}{A}\, T \tag{5,18}$$

führen (5,7) über in

$$\frac{du}{dT} - \frac{u}{T} + u_Q\, T = 0 \tag{5,19}$$

mit der Abkürzung

$$u_Q = \frac{\varepsilon_p A Q}{\varepsilon_e D_0^2}, \tag{5,20}$$

welche eine einfache Bedeutung hat. Sie geht nämlich mit den Anfangswerten $\omega_{e0} = D_0/A$ und $\omega_{p0} = Q/D_0$ von ω_e und ω_p über in $u_Q = \varepsilon_p\, \omega_{p0}/\varepsilon_e\, \omega_{e0}$, und das ist das Verhältnis der beiden Anfangswerte M_{p0} und M_{e0} der Reibungsmomente M_p und M_e, also

$$u_Q = \frac{M_{p0}}{M_{e0}}. \tag{5,21}$$

Die Größe u_Q ist somit für $M_{e0} > M_{p0}$ die Kote $u_q = \cos \delta_q$ des Schwerpunkts für den alsdann reellen Grenzwinkel δ_q aus (4,12) im Augenblick $t = 0$, welcher die beiden Bereiche anfänglichen Sinkens und Steigens des Schwerpunkts trennt; für $M_{e0} < M_{p0}$ hat u_Q nur die Bedeutung eines Parameters der Bewegung, da dann kein reeller Winkel δ_q zu u_Q gehört. Gemäß unserer Voraussetzung $\varepsilon_p > 0$ ist nach (5,20) auch $u_Q > 0$.

Das zum Anfangswert $u = u_0$ gehörige Integral von (5,19) lautet

$$u = (u_0 + u_Q)\, T - u_Q\, T^2, \tag{5,22}$$

woraus noch

$$\frac{du}{dT} = (u_0 + u_Q) - 2\, u_Q\, T \tag{5,23}$$

folgt.

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden. Es sei erstens $u_0 \leq u_Q$. Dies bedeutet für $u_Q < 1$, daß die Anfangskote u_0 unter dem wirklichen Wert u_Q liegen soll, für $u_Q \geq 1$, daß sie jeden beliebigen Wert (zwischen $+1$ und -1) haben darf. Jetzt ist schon für $T = 1$, also bei Bewegungsbeginn, zufolge (5,23) $du/dT \leq 0$ und für $T > 1$ umso mehr $du/dT < 0$, und dies besagt,

daß der Schwerpunkt von seiner Anfangskote u_0 an dauernd sinkt (im Einklang mit unseren Feststellungen in Ziff. 4). Die Exponentialzeit T_{-1} bis zum Erreichen des tiefsten Punktes $u = -1$ folgt aus (5,22) zu

$$T_{-1} = \frac{1}{2\,v_Q}\left[u_0 + u_Q + \sqrt{(u_0 + u_Q)^2 + 4\,u_Q}\right]. \tag{5,24}$$

Sei zweitens $u_0 > u_Q$. Dies ist nur möglich, wenn $1 > u_Q > 0$ ist. Jetzt wird nach (5,23) $du/dT > 0$ für $T = 1$, und dies besagt, daß der Schwerpunkt zunächst steigt. Setzt man den Wert von T aus (5,23) in (5,22) ein, so kommt

$$u = \frac{1}{4\,u_Q}\left[(u_0 + u_Q)^2 - \left(\frac{du}{dT}\right)^2\right], \tag{5,25}$$

und nun muß man zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem der aus (5,25) mit $du/dT = 0$ folgende Wert

$$u' = \frac{(u_0 + u_Q)^2}{4\,u_Q} \lessgtr 1 \tag{5,26}$$

ist. Im Unterfalle $u' < 1$ tritt eine Umkehr $du/dT = 0$ des anfänglich steigenden Schwerpunkts bei der Kote u' wirklich ein, und es wird von da an (wiederum in Übereinstimmung mit Ziff. 4) dauernd $du/dT < 0$ [weil nach (5,23) von einem Augenblick mit $du/dT = 0$ an dieser Wert mit fortschreitender Zeit T nur abnehmen kann]. Die Exponentialzeit des Steigens ist nach (5,23)

$$T' = \frac{u_0 + u_Q}{2\,u_Q}\,; \tag{5,27}$$

die Exponentialzeit des Sinkens folgt aus (5,24) mit u' statt u_0 sowie demjenigen Wert von u_Q, der aus (5,20) mit dem zu T' gehörenden Wert D_0' des Eigendrehimpulses berechnet ist.

Die Bedingung $u' < 1$ für diesen Umkehrfall kann man nach (5,26) auch in der Form $u_0 < u^*$ schreiben, wobei

$$u^* = 2\sqrt{u_Q} - u_Q \tag{5,28}$$

eine nur von u_Q (5,20) abhängige charakteristische Kote ist, und zwar gilt stets

$$u_Q < u^* < 1\,, \tag{5,29}$$

wie man rasch erkennt, wenn man darauf achtet, daß u_Q in (5,28) ein positiver echter Bruch ist. Die Bedingung dafür, daß der Schwerpunkt von seiner Anfangskote u_0 aus zuerst steigt, bei einer Kote $u' < 1$ umkehrt und bis zu seinem tiefsten Punkte $u = -1$ sinkt, kann man somit in die Ungleichungskette

$$u_Q < u_0 < u^*\,(< 1) \tag{5,30}$$

zusammenfassen. Mit $u_Q \to 1$ geht übrigens auch $u^* \to 1$, so daß dort der Bereich möglicher Anfangskoten u_0 mit späterer Umkehr auf Null zusammenschrumpft.

Im Unterfall $u' > 1$ endlich steigt der Schwerpunkt ohne Umkehr bis zum höchsten Punkt $u = 1$, wozu nach (5,22) die Exponentialzeit

$$T_{+1} = \frac{1}{2\,u_Q}\left[u_0 + u_Q - \sqrt{(u_0 + u_Q)^2 - 4\,u_Q}\right] \tag{5,31}$$

gehört.

Hiermit ist eine in Ziff. 4 allgemein geschilderte Erscheinung an einem bestimmten Reibungsgesetz auch rechnerisch bestätigt.

c) Der letzte Sonderfall $\varepsilon_p = 0$ ist wohl der wenigst wichtige. Außer dem auch hier gültigen Integral (5,16) für D_e folgt jetzt aus (5,6) und (5,7) mit $\varepsilon_p = 0$, dem Wert D_e (5,16) und der Exponentialzeit (5,15)

$$u = u_0\,T \tag{5,32}$$

und entweder

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\,T + \frac{\varepsilon_e\,\varepsilon_k}{A\,D_0}\,\frac{u_0\,T^2}{1 - u_0^2\,T^2} \tag{5,33}$$

als Funktion der Zeit oder auch

$$\omega_p = \frac{u\,Q}{u_0\,D_0}\left(1 + \frac{\varepsilon_e\,\varepsilon_k}{A\,Q}\,\frac{u}{1 - u^2}\right) \quad (u_0 \neq 0) \tag{5,34}$$

als Funktion der Kote u.

Die Deutung ist einfach. Je nachdem $u_0 \gtrless 0$, steigt der Schwerpunkt oder bleibt (labil) in gleicher Höhe oder sinkt, und zum beschleunigten Hauptanteil QT/D_0 der Präzession ω_p kommt noch ein ebenfalls beschleunigt positiver, verschwindender oder beschleunigt negativer Nebenanteil infolge der Reibung in den mittleren Kardanlagern BB. Für $u_0 > 0$ behält also die Präzession dauernd ihren Drehsinn bei; für $u_0 < 0$ dagegen wechselt sie ihre Drehrichtung nach der aus (5,33) folgenden Exponentialzeit

$$T_p = \frac{1}{u_0}\left(\varkappa - \sqrt{1+\varkappa^2}\right) \quad \text{mit} \quad \varkappa = \frac{\varepsilon_e\,\varepsilon_k}{2\,A\,Q}\,, \tag{5,35}$$

welche wegen $u_0 < 0$ positiv ist, und zwar bei der aus (5,32) und (5,35) folgenden negativen Kote

$$u_p = \varkappa - \sqrt{1+\varkappa^2}\,. \tag{5,36}$$

Falls $\varepsilon_k > 0$ ist, geht $\omega_p \to \infty$ für $u \to \pm 1$, was nur wieder besagt, daß unsere Theorie bei $u = \pm 1$ nicht ohne weiteres anwendbar ist. Falls jedoch $\varepsilon_k = 0$ ist, bleibt ω_p wieder durchweg endlich.

d) In dem nun noch übrigbleibenden allgemeinen Falle $\varepsilon_e > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_p > 0$ kann man wenigstens einige qualitative Schlüsse ziehen, ohne die Bewegungsgleichungen (5,6) und (5,7) zu integrieren, was wohl nur numerisch möglich wäre.

Auch hier gilt das Integral (5,16) von D_e mit (5,15). Wenn man sodann aus (5,6) und (5,7) das eine Mal $\dot{u}$ eliminiert, das andere Mal ω_p und dabei noch (5,6), (5,18) sowie die Abkürzung u_Q (5,20) benützt, so erhält man die beiden Gleichungen

$$1 - u^2 + \frac{\varepsilon_e\,\varepsilon_k}{A\,Q}\,u = \left(\frac{D_0}{Q}\,\frac{1-u^2}{T} + \frac{\varepsilon_k\,\varepsilon_p}{D_0\,Q}\,T\right)\omega_p\,, \tag{5,37}$$

$$\left(1 - u^2 + \frac{\varepsilon_k\,\varepsilon_p}{D_0^2}\,T^2\right) T\,\frac{du}{dT} = (u - u_Q\,T^2)\,(1-u^2)\,. \tag{5,38}$$

Aus (5,37) folgt mit $\omega_p = 0$, daß eine Umkehr der Präzession nur dann eintritt, wenn der Schwerpunkt sinkt, und zwar bei der negativen Kote u_p (5,36).

Aus (5,38) folgt, daß für $u_0 \leq u_Q$ der Schwerpunkt dauernd sinkt, da mit wachsendem T die rechte Seite von (5,38), die für $T = 1$ und $u_0 \leq u_Q$ Null oder negativ war, stärker und stärker negativ wird.

Was die Anfangskoten $u_0 > u_Q$ anlangt, so gibt Abb. 3 die Verhältnisse schematisch wieder. Dort sind jeweils zwei (u, T)-Diagramme der Bewegung vom gleichen Anfangswert u_0 für $\varepsilon_k = 0$ und $\varepsilon_k > 0$ miteinander verglichen. Für $\varepsilon_k = 0$ sind diese Diagramme nach (5,22) Parabeln. Aus (5,38) schließt man, daß die Höchstwerte u' von u sowohl für $\varepsilon_k = 0$, wie für $\varepsilon_k > 0$ auf der Parabel

$$u = u_Q\,T^2 \tag{5,39}$$

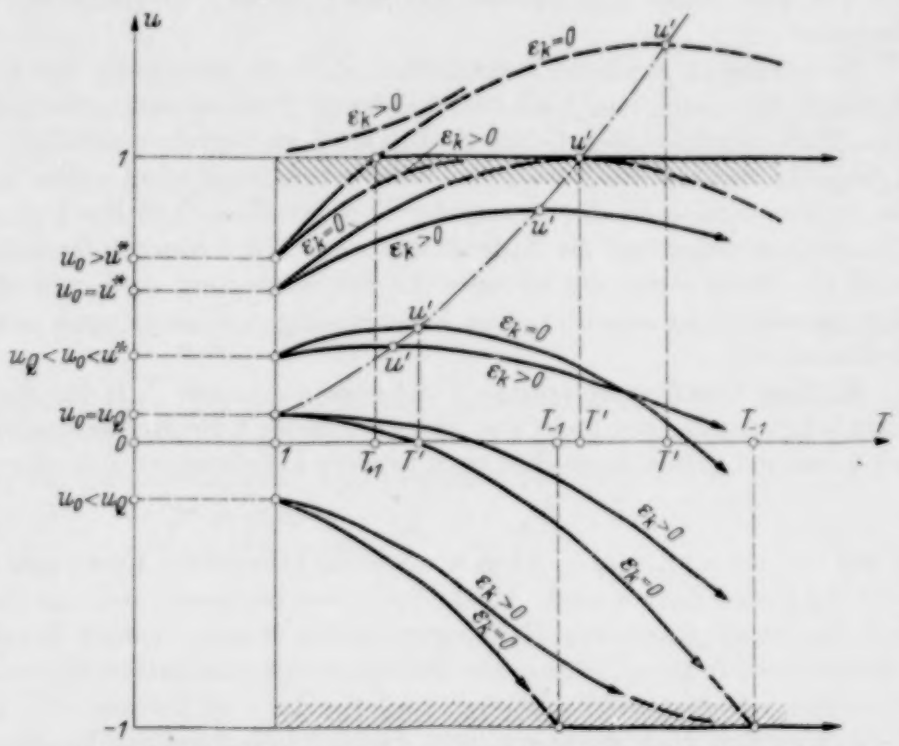

Abb. 3. Die (u, T)-Diagramme für $\varepsilon_k = 0$ (genau) und für $\varepsilon_k > 0$ (schematisch).

liegen (in Abb. 3 strichpunktiert), und daß die Kurve für $\varepsilon_k > 0$ bei gleicher Abszisse T links von der Parabel (5,39) jeweils eine geringere Steigung du/dT, rechts von ihr jeweils eine geringere Neigung $-du/dT$ hat als die dortige Kurve für $\varepsilon_k = 0$.

Für $\varepsilon_k = 0$ gehört, wenn die Umkehrkote $u' > 1$ ist, gemäß (5,38) auch noch die Gerade $u = 1$ zur Lösung und stets die Gerade $u = -1$, und so kann für $\varepsilon_k > 0$ kein Zweifel über den Verlauf der Kurven bestehen.

Für Anfangskoten u_0 mit der Bedingung (5,30) gibt es auch im Falle $\varepsilon_k > 0$ stets eine Umkehr des Schwerpunkts von anfänglichem Steigen zu endgültigem Sinken. Für Anfangswerte $u_0 > u^*$ ist die theoretische Kurve von $\varepsilon_k > 0$ benachbart zu der Kurve von $\varepsilon_k = 0$, welche nun aus einem Parabelstück und einer waagerechten Strecke $u = 1$ besteht, so daß also theoretisch über kurz oder lang eine Umkehr für $\varepsilon_k > 0$ zu erwarten wäre. In Wirklichkeit existiert nun aber, wie schon erwähnt, bei $u = 1$ ein von Nutationen erfüllter Bereich, in welchem unsere Theorie nichts Exaktes mehr aussagen kann, und der in Abb. 3 durch die Schraffur angedeutet ist. Sobald eine Kurve in diesen Bereich eintritt, ist zu erwarten, daß die Figurenachse in ihm so lange festgehalten wird, bis der Kreisel seine Eigenschaft als schneller Kreisel verloren hat und die (für den Fall der Reibung noch unbekannte) Stabilitätsbedingung des nunmehr „stehenden" Kreisels nicht mehr erfüllt ist. Deswegen gelten die Kurven $\varepsilon_k = 0$ für $u' \gtrsim 1$ nur, soweit sie in Abb. 3 voll ausgezogen sind, wogegen ihre dort gestrichelten Teile keine Exaktheit beanspruchen können. Für $\varepsilon_k > 0$ kann man, ehe eine strenge Theorie für die Umgebung von $u = 1$ entwickelt ist, anhand von Abb. 3 qualitativ nur so viel sagen, daß für $u_0 \gtrsim u^*$ und hinreichend kleine Werte von $\varepsilon_k > 0$ keine Umkehr des schnellen Kreisels eintritt, daß dagegen für hinreichend große ε_k — so groß nämlich, daß die Kurve nicht mehr in den schraffierten Bereich eindringt — Umkehr auch schon beim schnellen Kreisel möglich ist.

In Abb. 3 sind auch die Exponentialzeiten T_{+1} (5,31), T' (5,27) und T_{-1} (5,24) für $\varepsilon_k = 0$ eingetragen, und es ist durch den schraffierten Streifen bei $u = -1$ angedeutet, daß auch dort unsere Formeln keine exakten Werte mehr zu liefern vermögen. Die inneren Grenzen der beiden schraffierten Streifen sind natürlich nicht scharf definiert, und das, was wir vorhin „Eindringen" in den Bereich bei $u = 1$ nannten, kann nur durch eine exakte Theorie wirklich festgestellt werden. Der Deutlichkeit halber sind die beiden Streifen in Abb. 3 viel zu breit gezeichnet.

Man muß hier schließlich noch bei einigen Formeln von Abschnitt b) eine kleine Einschränkung hinzufügen, die um so unwesentlicher wird, je schneller der Kreisel ist, und zu welcher die zwar kleine, aber endliche Breite des schraffierten Bereiches bei $u = 1$ nötigt: Die strenge Grenze zwischen umkehrenden und nicht umkehrenden Bewegungen u liegt nicht genau bei $u_0 = u^*$, sondern ein wenig tiefer, und die diesbezüglichen Ungleichungen wie (5,26) und (5,30) sind dann auch in dem Sinne aufzufassen, daß das Symbol „$\gtrsim$" soviel wie „merklich größer oder kleiner" bedeutet.

Es erscheint zunächst befremdlich, daß die Bewegung der Figurenachse beim Loslassen des Kreisels mit einer von Null verschiedenen Präzessionsgeschwindigkeit und i. a. auch mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit $\dot{u}$ zu beginnen scheint. Dies ist aber nur dadurch vorgetäuscht, daß wir die Nutationen beim schnellen Kreisel außer acht gelassen haben. Tatsächlich beginnt natürlich die Bewegung der Figurenachse ohne Ruck ganz stetig, spielt sich aber in den Nutationen sofort auf die Anfangswerte ω_p und $\dot{u}$ unserer Rechnung ein in dem Sinne, daß diese und alle Folgewerte die Mittelwerte der Bewegung sind, wie sie das Auge sieht, wenn es die Nutationen nicht beachtet, eine Erscheinung, wie sie ja auch sonst aus der Kreiseltheorie wohlbekannt ist.[1]

6. Eine Verallgemeinerung. Die linearen Gesetze (5,1) für die flüssige Reibung stimmen mit Versuchen an Lagern nicht gut überein. Soweit die Reibung wirklich als flüssig und noch nicht als gemischt gelten kann, hat man bessere Erfahrungen mit allgemeineren Potenzgesetzen

$$M_e = \varepsilon_e \omega_e^l, \qquad M_k = \varepsilon_k \omega_k^m, \qquad M_p = \varepsilon_p \omega_p^n \tag{6,1}$$

gemacht, wo ε_e, ε_k und ε_p nach wie vor nichtnegative Festwerte und l, m, n positive, nicht notwendig ganze Zahlen sind. Merkwürdigerweise lassen sich die Sonderfälle b) und c) von Ziff. 5 mit diesen allgemeineren Reibungsgesetzen ebenso explizit durchrechnen; und obwohl wir uns dessen bewußt sind, daß unsere Theorie mehr qualitative als quantitative Richtigkeit anstrebt, so wollen wir doch die Ergebnisse auch für die allgemeineren Gesetze (6,1) hier zusammenstellen, — namentlich auch deswegen, weil explizit berechenbare Probleme mit nichtlinearen Reibungsgesetzen ziemlich selten sind.

In (6,1) und bei allen folgenden Potenzen mit nichtganzzahligen Exponenten soll stets der positive Hauptwert gemeint sein, und in jedem Falle sind natürlich die Forderungen (3,3) nachzuprüfen.

Die erste Bewegungsgleichung (4,1) lautet jetzt

$$\dot{D}_e = -\frac{\varepsilon_e}{A^l} D_e^l \tag{6,2}$$

[1]) Siehe etwa *R. Grammel*, Der Kreisel, a. a. O. S. 76.

und gibt integriert zum Anfangswert D_0, wenn wir weiterhin den schon in Ziff. 5 erledigten Fall $l = 1$ ausschließen,

$$D_e = \frac{D_0}{T} \tag{6,3}$$

mit der neuen „Exponentialzeit"

$$T = \left[1 + \frac{(l-1)\,\varepsilon_e\, D_0^{l-1}}{A^l}\, t\right]^{\frac{1}{1-l}}, \tag{6,4}$$

wozu noch

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon_e D_0^{l-1}}{A^l}\, T^{2-l} \tag{6,5}$$

gehört. Auch diese Exponentialzeit T geht von $T = 1$ für $t = 0$ aus und nimmt sowohl für $l > 1$, wie für $l < 1$ mit t monoton zu. Da sich weder der allgemeine Fall $\varepsilon_e > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_p > 0$, noch der Sonderfall a) von Ziff. 5 weiter explizit behandeln lassen, so wenden wir uns den beiden Sonderfällen b) und c) von Ziff. 5 zu.

b) In dem Sonderfalle $\varepsilon_k = 0$ nehmen jetzt die Bewegungsgleichungen (4,2) und (4,3) als Verallgemeinerungen von (5,6) und (5,7) die Gestalt an

$$D_e\, \omega_p = Q\,, \tag{6,6}$$

$$D_e\, \dot{u} = \frac{\varepsilon_e}{A^l}\, D_e^l\, u - \varepsilon_p\, \omega_p^n\,. \tag{6,7}$$

Aus (6,6) folgt mit (6,3)

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\, T\,, \tag{6,8}$$

also wieder eine monotone Zunahme von ω_p, und damit ist verbürgt, daß die Ansätze (6,1) in diesem Sonderfalle die Forderungen (3,3) erfüllen.

Mit (6,5) und (6,8) geht (6,7) über in

$$\frac{du}{dT} - \frac{u}{T} + u_Q\, T^{l+n-1} = 0 \tag{6,9}$$

mit der Abkürzung

$$u_Q = \frac{\varepsilon_p\, A^l\, Q^n}{\varepsilon_e\, D_0^{l+n}}\,, \tag{6,10}$$

welche sich ohne weiteres in

$$u_Q = \frac{\varepsilon_p\, \omega_{p0}^n}{\varepsilon_e\, \omega_{e0}^l} = \frac{M_{p0}}{M_{e0}} \tag{6,11}$$

umformt, also die frühere Bedeutung hat. Da wir auch hier $\varepsilon_e > 0$ und $\varepsilon_p > 0$ voraussetzen dürfen, so ist $u_Q > 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1) $l + n \neq 1$. Hier hat (6,9) das zum Anfangswert u_0 passende Integral

$$u = \frac{1}{l+n-1}\left\{\left[(l+n-1)\,u_0 + u_Q\right] T - u_Q\, T^{l+n}\right\} \tag{6,12}$$

samt

$$\frac{du}{dT} = \frac{1}{l+n-1}\left\{\left[(l+n-1)\,u_0 + u_Q\right] - (l+n)\,u_Q\, T^{l+n-1}\right\}. \tag{6,13}$$

Aus (6,13) folgt für den Bewegungsbeginn $T = 1$

$$\left(\frac{du}{dT}\right)_1 = u_0 - u_Q\,, \tag{6,14}$$

also anfängliches Steigen oder Sinken des Schwerpunkts, je nachdem $u_0 \gtrless u_Q$ ist. Falls $u_Q \geqq 1$ ist, sinkt der Schwerpunkt von Anfang an und dann gemäß (6,13) dauernd bis zu seinem tiefsten Punkte.

Falls $u_Q < 1$ ist und $u_0 \leqq u_Q$ war, so sinkt der Schwerpunkt ebenfalls monoton bis zu seinem tiefsten Punkt; dagegen steigt er für $u_0 > u_Q$ zunächst an, und zwar höchstens bis zu der aus

(6,13) mit $du/dT = 0$ folgenden Zeit

$$T' = \left[\frac{(l+n-1)\,u_0 + u_Q}{(l+n)\,u_Q}\right]^{\frac{1}{l+n-1}}, \tag{6,15}$$

wobei in der Tat $T' > 1$ für $u_0 > u_Q$ ist. Jetzt kommt es wieder darauf an, ob die zu T' gehörende Umkehrkote $u' \gtrless 1$ ist; denn wenn $u' \geq 1$ ist, bleibt u vor oder mit der Zeit T' beim Wert $u = 1$ stehen. Wenn jedoch $u' < 1$ bleibt, so sinkt für $T > T'$ der Schwerpunkt dauernd bis zum tiefsten Punkt. Wie dabei die Zeiten T_{+1} und T_{-1} aus (6,12) zu berechnen sind, brauchen wir nicht weiter zu erläutern.

Die Kote u', die zu T' gehört, folgt aus (6,12) mit (6,15) zu

$$u' = u_Q\, T'^{\,l+n} = u_Q \left[\frac{(l+n-1)\,u_0 + u_Q}{(l+n)\,u_Q}\right]^{\frac{l+n}{l+n-1}}. \tag{6,16}$$

Die Bedingung $u' < 1$ für eine Umkehr führt nach (6,12) auf

$$(l+n-1)\,u_0 \lessgtr (l+n)\,u_Q^{\frac{1}{l+n}} - u_Q \qquad (l+n \gtrless 1)$$

oder (wegen $u_0 > u_Q$ für anfängliches Steigen) auf

$$\left.\begin{aligned} u_Q < u_0 < u_1^* \quad &\text{für} \quad l+n > 1\,, \\ u_Q < u_0 < u_2^* \quad &\text{für} \quad l+n < 1 \end{aligned}\right\} \tag{6,17}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{l+n-1}\left[(l+n)\,u_Q^{\frac{1}{l+n}} - u_Q\right] \quad \text{für} \quad l+n > 1, \\ u_2^* &= \frac{1}{1-l-n}\left[u_Q - (l+n)\,u_Q^{\frac{1}{l+n}}\right] \quad \text{für} \quad l+n < 1, \end{aligned}\right\} \tag{6,18}$$

und man stellt fest, daß für jeden positiven echten Bruch u_Q (wie es ja jetzt zutrifft) die eckigen Klammern in (6,18) positiv sind. Man prüft außerdem leicht nach, daß mit wachsendem u_Q auch u_1^* und u_2^* monoton wachsen, und daß hier mit $u_Q \to 1$ ebenfalls $u_1^* \to 1$ und $u_2^* \to 1$ gehen.

2) $l + n = 1$. In diesem Falle lauten die Ergebnisse (mit denselben Gleichungsnummern)

$$u = T\,(u_0 - u_Q \ln T)\,, \tag{6,12*}$$

$$\frac{du}{dT} = u_0 - u_Q\,(1 + \ln T)\,, \tag{6,13*}$$

$$\left(\frac{du}{dT}\right)_{-1} = u_0 - u_Q\,, \tag{6,14*}$$

$$T' = e^{\frac{u_0 - u_Q}{u_Q}}\,, \tag{6,15*}$$

$$u' = u_Q\, T' = u_Q\, e^{\frac{u_0 - u_Q}{u_Q}}\,, \tag{6,16*}$$

$$u_Q < u_0 < u_3^*\,, \tag{6,17*}$$

$$u_3^* = u_Q\,(1 - \ln u_Q) \tag{6,18*}$$

mit gleichen Folgerungen wie im Falle $l + n \neq 1$.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß alle wesentlichen Ergebnisse von Ziff. **5** b) auch für das allgemeinere Reibungsgesetz qualitativ erhalten geblieben sind — wie ja nach Ziff. **4** zu erwarten war.

c) Im Sonderfalle $\varepsilon_p = 0$ gelten nach wie vor die Gleichungen (6,2) bis (6,5). Die beiden anderen Bewegungsgleichungen nehmen nun statt (5,3) und (5,7) die allgemeinere Gestalt an

$$D_e\,\omega_p \sin\delta = Q \sin\delta \mp \varepsilon_k\,|\dot\delta|^m \qquad (\dot\delta \gtrless 0)\,, \tag{6,19}$$

$$D_e\,\dot u = \frac{\varepsilon_e}{A^l}\,D_e^l\,u\,, \tag{6,20}$$

womit wiederum die Forderung (3,3) erfüllt ist. Denn aus (6,20) folgt mit (6,3) und (6,5)

$$u = u_0\, T\,, \tag{6,21}$$

also ein monotones Steigen oder Sinken des Schwerpunkts, je nachdem die Anfangskote $u_0 \gtrless 0$ war, und eine (labil) waagerechte Präzession der Figurenachse, falls diese anfänglich waagerecht war.

Wegen $u = \cos\delta$, also $\dot\delta = -\dot u/\sin\delta$ hat man statt (6,19) mit (6,3)

$$\frac{D_0}{T}\,\omega_p \sin\delta = Q\sin\delta \pm \varepsilon_k \frac{|\dot u|^m}{\sin^m\delta} \qquad (u_0 \gtrless 0)\,,$$

oder wegen der aus (6,21) und (6,5) folgenden Beziehung

$$\dot u = u_0 \frac{\varepsilon_e\, D_0^{l-1}}{A^l}\, T^{2-l}$$

und mit dem aus (6,21) folgenden Wert $\sin^2\delta = 1 - u_0^2\, T^2$

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\, T \pm a\, \frac{T^{(2-l)m+1}}{(1 - u_0^2\, T^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}} \qquad (u_0 \gtrless 0) \tag{6,22}$$

mit der Abkürzung

$$a = \frac{\varepsilon_e^m\, \varepsilon_k\, |u_0|^m\, D^{(l-1)m-1}}{A^{lm}} \tag{6,23}$$

oder auch

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\left|\frac{\cos\delta}{u_0}\right| \pm b\, \frac{|\cos\delta|^{(2-l)m+1}}{\sin^{m+1}\delta} \qquad (u_0 \gtrless 0) \tag{6,24}$$

mit der Abkürzung

$$b = \frac{\varepsilon_e^m\, \varepsilon_k\, (|u_0|\, D_0)^{(l-1)m-1}}{A^{lm}}\,. \tag{6,25}$$

In (6,22) ist ω_p als Funktion der Zeit, in (6,24) als Funktion des Winkels δ dargestellt.

Für $u_0 > 0$, also steigenden Schwerpunkt, behält die Präzession ihren Drehsinn dauernd bei; für $u_0 < 0$, also sinkenden Schwerpunkt, kann sie ihr Vorzeichen bei einem Winkel $\delta_p > 90°$ wechseln, wenn der aus (6,24) mit $\omega_p = 0$ zu ermittelnde Wert δ_p reell ist.

Auch für diesen Sonderfall sind also alle wesentlichen Ergebnisse von Ziff. **5** c) qualitativ erhalten geblieben.

Wir wollen schließlich nur noch bemerken, daß alle Formeln von (6,6) an auch dann gelten, wenn man wieder speziell $l = 1$ wählen will; man muß dann nur unter T die Exponentialzeit (5,15) statt (6,4) verstehen.

7. Bewegungen und Sperrungen bei trockener Reibung. Wenn die Reibung in allen Lagern trocken ist, so sind in den Bewegungsgleichungen (4,1) bis (4,4) die Reibungsmomente M_e, M_k und M_p feste Werte. Nimmt man diese Festwerte weiterhin als positiv an, so muß man wegen (3,3) die Bewegungsgleichungen in der Form schreiben

$$\dot D_e = -M_e\,, \tag{7,1}$$

$$D_e\,\omega_p \sin\delta = Q\sin\delta \mp M_k \qquad (\omega_k \gtrless 0)\,, \tag{7,2}$$

$$D_e\,\omega_k \sin\delta = \pm M_p - M_e\cos\delta \qquad (\omega_p \gtrless 0)\,. \tag{7,3}$$

Diese Gleichungen gelten nur für ungesperrte Bewegungen, und nur für ungesperrte Bewegungen sind M_p und M_k die vorgegebenen Gleitreibungsmomente.

Da beim schnellen Kreisel keine Sperrung der Eigendrehung ω_e in Betracht zu ziehen ist, so ist M_e stets als vorgegeben anzusehen und kann (7,1) wieder für sich allein integriert werden; man erhält, wenn der Fall $M_e = 0$ zunächst ausgeschlossen wird, mit der neuen „Exponentialzeit"

$$T = \frac{D_0}{D_0 - M_e\, t}\,, \tag{7,4}$$

wozu noch

$$\frac{dT}{dt} = \frac{M_e}{D_0} T^2 \tag{7,5}$$

gehört, das zum Anfangswert D_0 passende Integral

$$D_e = \frac{D_0}{T}, \tag{7,6}$$

also, weil ja auch T monoton mit t geht, die erwartete monotone Abnahme von D_e.

Die Gleichung (7,3) nimmt, in die Kote u (5,5) und in die Zeit T umgeschrieben, wegen (7,6) die Gestalt

$$T \frac{du}{dT} = u \mp u_q \qquad (\omega_p \gtrless 0) \tag{7,7}$$

an, wobei wir die Abkürzung

$$u_q = \frac{M_p}{M_e} \tag{7,8}$$

mit ihrer bei (4,12) erklärten Bedeutung benützen. Für manche Zwecke ist es besser, noch ein zweites Zeitmaß

$$\tau = \ln T = \ln \frac{D_0}{D_0 - M_e t} \tag{7,9}$$

einzuführen, ebenfalls monoton mit t, sodaß man (7,7) auch in der Gestalt

$$\frac{du}{d\tau} = u \mp u_q \qquad (\omega_p \gtrless 0) \tag{7,10}$$

schreiben kann.

Die Gleichung (7,2) schließlich geht mit

$$s_p = \frac{M_k}{Q} \tag{7,11}$$

und (7,6) über in

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0} T \left(1 \mp \frac{s_p}{\sin \delta}\right) \qquad (\dot{\delta} \gtrless 0, \dot{u} \lesssim 0). \tag{7,12}$$

Dabei definiert für $0 \leq M_k \leq Q$ die Abkürzung s_p einen reellen Winkel δ_p mit

$$\sin \delta_p = \frac{M_k}{Q}, \tag{7,13}$$

wogegen s_p für $M_k > Q$ nur ein Parameter ist. Wir müssen nun vier Fälle unterscheiden.

a) $M_p > M_e$, $M_k > Q$. Hier ist nach (7,8) und (7,11) $u_q > 1$ und $s_p > 1$, also δ_p nicht reell, und nun führen die Gleichungen (7,10) und (7,12) auf einen Widerspruch. Denn falls $\dot{u} > 0$ wäre, so müßte nach (7,12) $\omega_p > 0$ sein, was aber nach (7,10) auf $du/d\tau < 0$, also auch $\dot{u} < 0$ führen würde. Aus $\dot{u} < 0$ würde in gleicher Weise $\dot{u} > 0$ folgen. Dieser Widerspruch ist nur zu beseitigen, wenn man[1] $\dot{\delta} \to +0$, also $\dot{u} \to -0$ und $\omega_p \to +0$ gehen läßt und in (7,10) und (7,12) statt u_q (7,8) und s_p (7,11) die Parameter

$$u_q^* = \frac{M_p^*}{M_e}, \qquad s_p^* = \frac{M_k^*}{Q}$$

einführt, was mit dem jeweils vorhandenen Wert $u = \cos \delta$ nach (7,10) und (7,12) die Haftreibungsmomente

$$M_k^* = Q \sin \delta, \qquad M_p^* = u M_e \tag{7,14}$$

ergibt und also völlige Sperrung der Schwerpunktsbewegung $\dot{u}$ und der Präzession ω_p bedeutet.

Die Haftreibungsmomente M_k^* und M_p^* sind nach Betrag und Vorzeichen einleuchtend: M_k^* muß das Schweremoment kompensieren, M_p^* die Rückwirkung des Reibungsmomentes M_e, als Vektor M_p^* für $u > 0$ nach unten, für $u < 0$ nach oben weisend.

In einem Phasendiagramm mit den Koordinaten u und $du/d\tau$ wird diese völlige Sperrung der Figurenachse durch das stark ausgezogene Geradenstück in Abb. 4 dargestellt. Für diesen Fall ist das Phasendiagramm allerdings noch trivial und nur der Vollständigkeit halber angegeben.

[1] Dabei soll $x \to +0$ bzw. $x \to -0$ heißen: x geht von positiven bzw. von negativen Werten her gegen Null.

b) $M_p < M_e$, $M_k > Q$. Jetzt ist $u_q < 1$ und $s_p > 1$. Dies führt für $u_q > u > -u_q$ auf den gleichen Widerspruch wie vorhin, für $u > u_q$ dagegen nur dann auf keinen Widerspruch, wenn $\dot{u} > 0$ und also $\omega_p > 0$ ist, für $u < -u_q$, wenn $\dot{u} < 0$ und also $\omega_p < 0$ ist. Im Phasendiagramm gibt das die stark ausgezogenen Geradenstücke von Abb. 5. Dort stellt die obere Gerade die „obere" Gleichung (7,10), die untere Gerade die „untere" Gleichung (7,10) dar. Man hat völlige Sperrung von $\dot{u}$ und ω_p im Bereich zwischen u_q und $-u_q$, und zwar mit den Haftreibungsmomenten (7,14), dagegen Steigen des Schwerpunkts mit positiver Präzession ω_p für $u > u_q$ und Sinken des Schwerpunkts mit negativer Präzession ω_p für $u < -u_q$.

c) $M_p > M_e$, $M_k < Q$. Nun ist $u_q > 1$ und $s_p < 1$, also δ_p reell und die zugehörige Kote $u_p = \cos\delta_p < 1$ (und positiv). Man prüft leicht nach, daß kein Widerspruch nur für $\dot{u} < 0$ und $u_p \geqq u \geqq -u_p$ entsteht, daß also der Schwerpunkt im Bereich zwischen u_p und $-u_p$ sinkt, und zwar mit positiver Präzession ω_p, wogegen oberhalb u_p und unterhalb $-u_p$ Sperrung eintritt. Das Phasendiagramm zeigt Abb. 6.

d) $M_p < M_e$, $M_k < Q$. Hier ist $u_q < 1$ und $s_p < 1$, also δ_p reell mit $u_p < 1$, und nun hat man zwei Unterfälle.

1) $u_q > u_p$. Man erhält jetzt ohne Widerspruch $\dot{u} > 0$ und $\omega_p > 0$

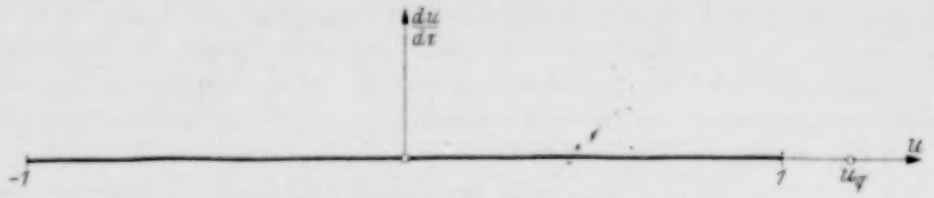

Abb. 4. Phasendiagramm für $M_p > M_e$, $M_k > Q$.

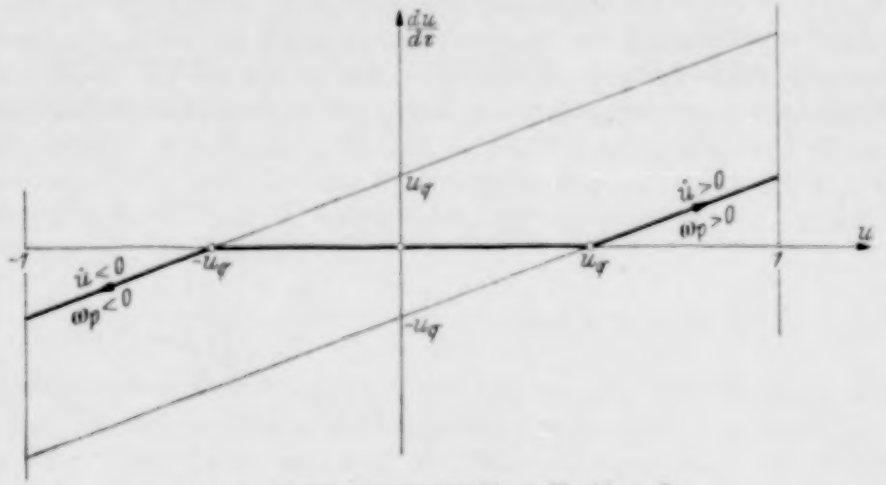

Abb. 5. Phasendiagramm für $M_p < M_e$, $M_k > Q$.

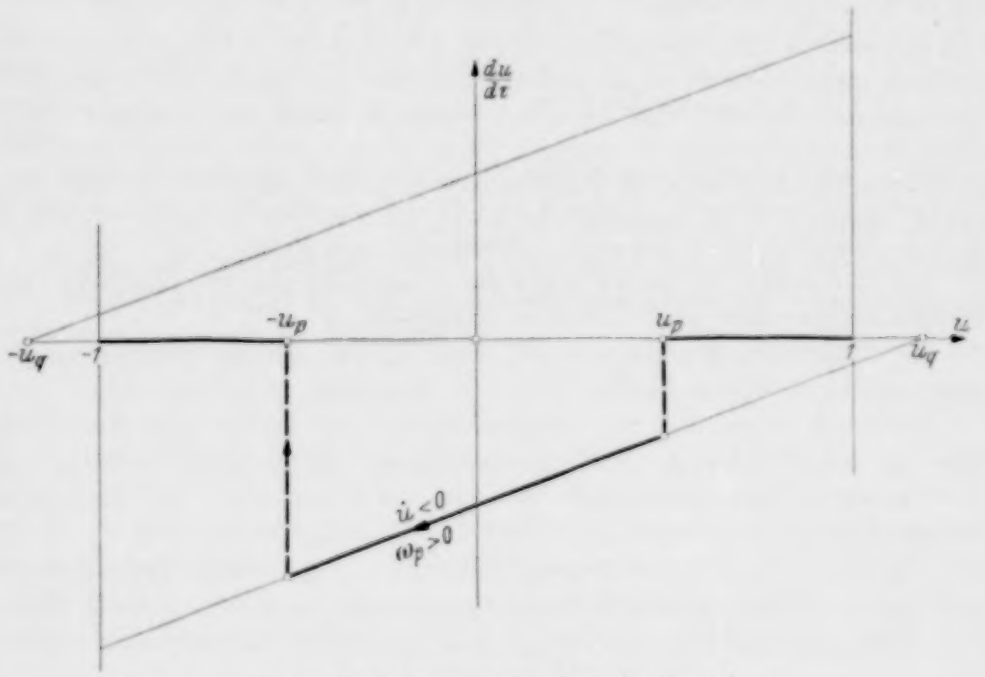

Abb. 6. Phasendiagramm für $M_p > M_e$, $M_k < Q$.

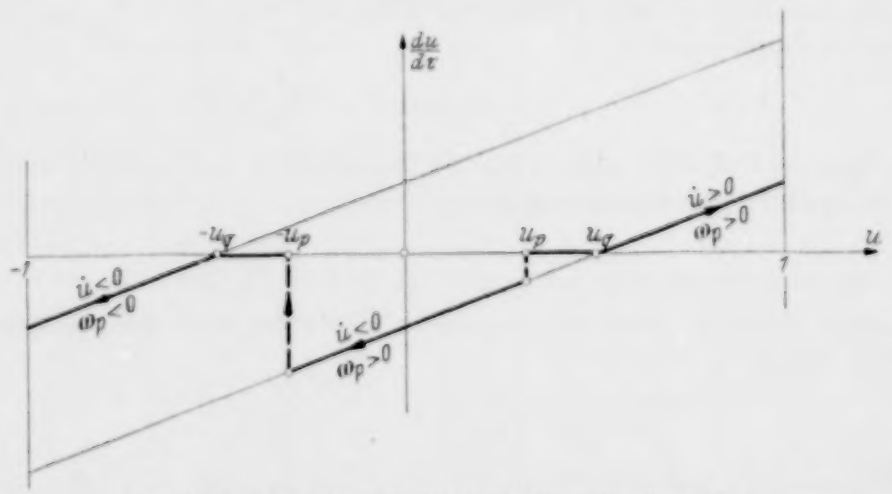

Abb. 7. Phasendiagramm für $M_p < M_e$, $M_k < Q$ und $u_q > u_p$.

für $u > u_q$, ebenso $\dot{u} < 0$ und $\omega_p > 0$ für $u_p > u > -u_p$, und endlich $\dot{u} < 0$ und $\omega_p < 0$ für $u < -u_q$, in den anderen Bereichen dagegen Sperrung. Das Phasendiagramm Abb. 7 zeigt dies übersichtlich: Steigen des Schwerpunkts mit positiver Präzession für $u > u_q$, Sinken mit positiver Präzession im Bereich zwischen u_p und $-u_p$ und mit negativer Präzession für $u < -u_q$, sonst Sperrung.

2) $u_q < u_p$. Man stellt leicht fest, daß nun beide Sperrbereiche des vorigen Unterfalls verschwunden sind und das Phasendiagramm Abb. 8 entsteht.

Zusammenfassend kann man aus Abb. 4 bis 8 entnehmen, daß für eine Anfangskote $u_0 = u_q$ nur (labiler) Stillstand der Figurenachse möglich ist, für $u_0 < u_q$ außer (gesperrtem) Stillstand nur Sinken des Schwerpunkts, für $u_0 > u_q$ nur Steigen des Schwerpunkts in Frage kommt, und daß bei steigendem Schwerpunkt nur eine positive Präzession, bei sinkendem Schwerpunkt dagegen auch wieder ein Umschlag zu negativer Präzession möglich ist.

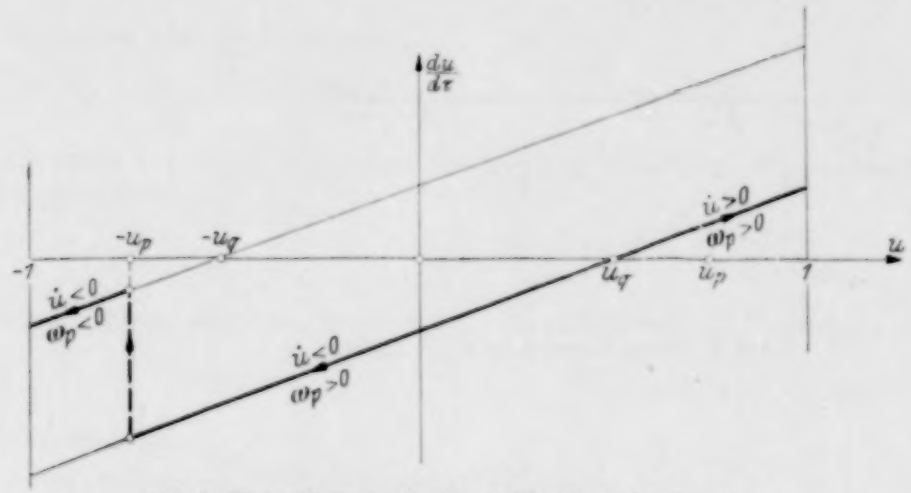

Abb. 8. Phasendiagramm für $M_p < M_e$, $M_k < Q$ und $u_q < u_p$.

Die zur u-Achse normalen Teilstücke in den Phasendiagrammen (in Abb. 6 bis 8 gestrichelt) mit den Abszissen u_p, $-u_p$ stellen Sprünge in den Geschwindigkeiten $\dot{u}$, ω_p dar. Diejenigen mit der Abszisse $+u_p$ entsprechen dem bei labiler Sperrung infolge einer kleinen Störung einsetzenden Sinken des Schwerpunktes. Diejenigen mit der Abszisse $-u_p$ treten bei sinkendem Schwerpunkt von selbst auf (da u nicht konstant bleiben kann, solange $\dot{u}$ von Null verschieden ist) und haben (Abb. 6 und 7) eine plötzliche Sperrung oder aber (Abb. 8) den Umschlag von der positiven zur negativen Präzession zur Folge.

Die Grenzfälle, in denen statt der Ungleichheits- die Gleichheitszeichen gelten, sind aus den Phasendiagrammen ohne weiteres abzulesen.

Die Haftreibungsmomente M_k^* und M_p^* für die Sperrungen in den Fällen c) und d 1) kann man analog zu (7,14) finden.

Natürlich ist auch in den Diagrammen Abb. 4 bis 8 wieder ein schmaler Streifen je bei $u = \pm 1$ von unseren Gleichungen nicht mehr streng erfaßbar, und für die scheinbar plötzlich einsetzenden Bewegungen, Sperrungen und Sprünge von $\dot{u}$ und ω_p ist auf die Schlußbemerkung von Ziff. 5 zu verweisen.

Während die Präzessionsgeschwindigkeit ω_p (soweit ungesperrt) schon durch (7,12) dargestellt ist [mit Vorwegnahme des erst aus der folgenden Gleichung (7,15) zu entnehmenden Wertes δ als Funktion von T], so liefert (7,7) den zeitlichen Verlauf von u (soweit ungesperrt) zu

$$u = \pm u_q + (u_0 \mp u_q)\, T \qquad (\omega_p \gtrless 0)\,, \tag{7,15}$$

und hieraus folgt in den Fällen von Abb. 5, 7 und 8 die Exponentialzeit des Steigens bis zum höchsten Punkte $u = 1$

$$T_{+1} = \frac{1 - u_q}{u_0 - u_q} \qquad (u_0 > u_q < 1) \tag{7,16}$$

und etwa im Fall von Abb. 8 die Exponentialzeit des Sinkens des Schwerpunktes bis zur Kote $u = -u_p$ der Präzessionsumkehr

$$T_p = \frac{u_p + u_q}{u_q - u_0} \qquad (u_0 < u_q) \tag{7,17}$$

und dann vollends noch die Exponentialzeit des Sinkens des Schwerpunkts bis zum tiefsten Punkte $u = -1$

$$T_{-1} = \frac{1 - u_q}{u_p - u_q}\, T_p = \frac{(1 - u_q)(u_p + u_q)}{(u_p - u_q)(u_q - u_0)} \qquad (u_0 < u_q,\ \ u_p > u_q)\,. \tag{7,18}$$

Während die früheren Sonderfälle $M_k = 0$ bzw. $M_p = 0$ schon in den bisherigen Diagrammen und Formeln mit $s_p = 0$, $u_p = 1$ bzw. $u_q = 0$ enthalten sind, so bedarf der Sonderfall $M_e = 0$

des synchron angetriebenen Kreisels einer besonderen Behandlung. Jetzt sind die Bewegungsgleichungen statt (7,1) bis (7,3) bzw. (7,12)

$$D_e = D_0\,, \tag{7,19}$$

$$\omega_p = \frac{Q}{D_0}\left(1 \mp \frac{s_p}{\sin\delta}\right) \qquad (\dot\delta \gtrless 0,\ \dot u \lesssim 0)\,, \tag{7,20}$$

$$\dot u = \mp \frac{M_p}{D_0} \qquad (\omega_p \gtrless 0)\,. \tag{7,21}$$

Man stellt leicht fest, daß für $M_k > Q$, also $s_p > 1$, stets ein Widerspruch vorhanden ist, also völlige Sperrung eintritt, und daß für $M_k < Q$, also $s_p < 1$ nur bei $u_p > u > -u_p$ und $\dot u < 0$ mit $\omega_p > 0$ kein Widerspruch vorliegt, was Sinken des Schwerpunkts mit positiver Präzessionsdrehung im Bereich zwischen u_p und $-u_p$ bedeutet und Sperrung für $u > u_p$ und $u < -u_p$. In der Phasenebene wird dies dargestellt durch Abb. 6, worin jetzt t statt τ geschrieben werden darf. Für das Sinken des Schwerpunkts gilt nach (7,21)

$$u = u_0 - \frac{M_p}{D_0}\,t \qquad (u_p > u > -u_p)\,. \tag{7,22}$$

8. Weitere Sperrungen. Außer den in Ziffer 7 gefundenen Sperrungen bei trockener Reibung gibt es noch weitere Sperrungen, die aber aus unseren Bewegungsgleichungen (7,2) und (7,3) nicht entnommen werden können. Dies rührt davon her, daß diese Gleichungen nur eine erste Näherung der exakten Vektorgleichung (3,1) für den schnellen Kreisel sind. Wir müssen sie mit dem nächst höheren Grad von Genauigkeit ansetzen und nun in dem Glied $\dot{\mathfrak{D}}$ auch noch die beiden Komponeten $D_k = B\,\dot\delta$ und $D_q = B\,\omega_p \sin\delta$ von $\mathfrak{D}$ in der positiven Knoten- und Querachse hinzunehmen, welche wir bisher gegen das i. a. große Führungsglied $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{D}]$ vernachlässigen durften. Dabei ist B die äquatoriale Drehmasse des Kreiselkörpers um jede Achse durch den Kardanmittelpunkt O senkrecht zur Figurenachse. In dem Glied $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{D}]$ dagegen darf nach wie vor D_e allein die Rolle von $\mathfrak{D}$ übernehmen. Diese Erweiterung ist deswegen nötig, weil es, wie wir sehen werden, Sperrungen gibt, bei denen die Komponenten von $[\mathfrak{o}\,\mathfrak{D}]$ in der Knoten- oder Querachse verschwinden, so daß dann die dortigen Komponenten von $\dot{\mathfrak{D}}$ nicht mehr gegen sie vernachlässigt werden dürfen. Man erhält so statt (7,2) und (7,3), wenn man auch hier wieder die Komponentengleichung in der Querachse nachträglich mit $\sin\delta$ erweitert,

$$B\,\ddot\delta + D_e\,\omega_p \sin\delta = Q\sin\delta \mp M_k \qquad (\dot\delta \gtrless 0)\,, \tag{8,1}$$

$$-B\sin\delta\,\frac{d}{dt}(\omega_p\sin\delta) + D_e\,\omega_k\sin\delta = \pm M_p - M_e\cos\delta \qquad (\omega_p \gtrless 0)\,, \tag{8,2}$$

wogegen die Gleichung (7,1) für D_e unverändert gilt, so daß wir in (8,1) und (8,2) D_e als bekannte Zeitfunktion (7,6) eingesetzt denken wollen.

Eine erste Sperrung betrifft die freien Pendelungen des schnellen Kreisels um die Knotenachse bei festgehaltener Präzessionsachse, also bei Sperrung in den äußeren Kardanlagern CC. Wir suchen vor allem Antwort auf die Frage nach dem erforderlichen Festklemmungsmoment in diesen Lagern. Die Gleichungen (8,1) und (8,2) lauten für diesen Fall mit $\omega_p \equiv 0$

$$B\,\ddot\delta = Q\sin\delta \mp M_k \qquad (\dot\delta \gtrless 0)\,, \tag{8,3}$$

$$\pm M_p^* = M_e\cos\delta + D_e\,\dot\delta\sin\delta\,. \tag{8,4}$$

Hier ist (8,3) die bekannte Pendelgleichung (mit trockener Reibung M_k). Ihre Integration liefert $\delta(t)$ und $\dot\delta(t)$, und dann folgt aus (8,4) als mindest erforderliche Lagerreibung der Höchstwert von M_p^* nach beiden Drehrichtungen.

Das Gegenstück zu dieser Sperrung stellt die Präzession mit gesperrter Drehung $\dot\delta$ dar. Hier lauten die Gleichungen (8,1) und (8,2) mit $\omega_k = \dot\delta \equiv 0$

$$\dot\omega_p = \frac{\mp M_p + M_e\cos\delta}{B\sin^2\delta} \qquad (\omega_p \gtrless 0)\,, \tag{8,5}$$

$$M_k^* = (Q - D_e\,\omega_p)\sin\delta\,. \tag{8,6}$$

Wir müssen nun wieder vier Fälle unterscheiden.

a) $M_p > M_e$, also δ_q nach (4,12) nicht reell. Hier führt (8,5) mit beiden Vorzeichen von M_p auf einen Widerspruch. Denn mit $\omega_p > 0$ würde jetzt die rechte Seite negativ; dies gäbe negative Beschleunigung $\dot{\omega}_p$ und also (da ω_p jetzt natürlich mit dem Wert $\omega_p = 0$ beginnt) $\omega_p < 0$; mit $\omega_p < 0$ aber würde die rechte Seite von (8,5) positiv und somit $\dot{\omega}_p > 0$ und $\omega_p > 0$. Es tritt daher bei jedem Winkel δ Sperrung auch der Präzession ω_p ein, und zwar mit den Sperrmomenten (7,14). Dieser Fall ist schon in Ziff. 7 a) auf anderem Wege gefunden worden und gilt auch noch für $M_p = M_e$.

b) $M_p < M_e$, $\delta < \delta_q$ reell aus (4,12). Jetzt stellt (8,5) nur mit $\omega_p > 0$ keinen Widerspruch dar. Die Präzession ω_p mit festem Winkel $\delta < \delta_q$ läuft also positiv beschleunigt an und weiter. Führt man den dann aus (8,5) folgenden Wert

$$\omega_p = \frac{-M_p + M_e \cos\delta}{B \sin^2\delta} t \tag{8,7}$$

in (8,6) ein, so hat man das Haftreibungsmoment M_k^* gefunden. Natürlich gilt dies nur bis zu Werten von ω_p, die noch klein gegen die Eigendrehgeschwindigkeit ω_e sind, weil sonst der Kreisel nicht mehr als schnell angesehen werden dürfte.

c) $M_p < M_e$, $\delta_q < \delta < 180° - \delta_q$. Man findet für beide Vorzeichen von ω_p in (8,5) einen Widerspruch, und dies bedeutet wieder Sperrung auch für die Präzession mit den Sperrmomenten (7,14), und zwar auch noch in den Grenzfällen $\delta = \delta_q$ und $\delta = 180° - \delta_q$.

d) $M_p < M_e$, $\delta > 180° - \delta_q$. Jetzt stellt (8,5) nur mit $\omega_p < 0$ keinen Widerspruch dar. Die Präzession ω_p mit festem $\delta > 180° - \delta_q$ läuft also negativ beschleunigt an und weiter. Das Sperrmoment folgt wie im Falle b), und auch diese Überlegung gilt nur für nicht zu große Werte von ω_p.

Würde man $\dot{\omega}_p$ über der Abszisse $u = \cos\delta$ auftragen, so entstünden Diagramme von der Art der früheren Phasendiagramme für u, und zwar gemäß Abb. 4 für den Fall a) und gemäß Abb. 5 für die Fälle b), c) und d) zusammengenommen. Aus ihnen könnte man dann für jeden festen Wert u die Präzessionsbeschleunigung $\dot{\omega}_p$ ablesen.

9. Der Kreisel ohne Schweremoment. Wenn der Schwerpunkt S mit dem Kardanmittelpunkt O zusammenfällt und also nach (2,1) $Q = 0$ wird, so kann man für diesen Kreisel, der ohne Reibung kräftefrei genannt wird, den Einfluß der Reibung aus unseren früheren Ergebnissen ohne weiteres entnehmen, wenn man dort $Q = 0$ setzt. Man darf dabei den Kreisel stets als rechtsdrehend ansehen.

So findet man für flüssige Reibung im Falle a) von Ziff. 5, also für $\varepsilon_e = 0$, d. h. den synchron angetriebenen Kreisel, aus (5,11) und (5,13)

$$u = u_0\,, \qquad \omega_p = 0 \qquad (\varepsilon_e = 0)\,, \tag{9,1}$$

und das besagt, daß die Figurenachse stillsteht und die Reibung ohne Wirkung ist, ein durchaus einleuchtendes Ergebnis.

Ebenso findet man für $\varepsilon_k = 0$ aus (5,17), (5,20), (5,22) und (5,28)

$$\omega_p = 0\,, \qquad u_Q = 0\,, \qquad u = u_0\, T\,, \qquad u^* = 0 \qquad (\varepsilon_k = 0)\,, \tag{9,2}$$

und das besagt, daß das äußere Ende der positiven Figurenachse sich dem äußeren Kardanring auf kürzestem Wege ohne Umkehr und ohne Präzession nähert, es sei denn, daß sie senkrecht zu ihm stand, in welchem Falle sie dann stehen bleibt (natürlich labil).

Im Falle $\varepsilon_p = 0$ findet man aus (5,32) und (5,33)

$$u = u_0\, T\,, \qquad \omega_p = \frac{\varepsilon_e\, \varepsilon_k}{A\, D_0} \frac{u_0\, T^2}{1 - u_0^2\, T^2} \qquad (\varepsilon_p = 0)\,, \tag{9,3}$$

also die gleiche Bewegung der Figurenachse, nun aber mit einer Präzession, deren Drehvektor ω_p mit der positiven Figurenachse einen spitzen Winkel bildet, oder aber (labilen) Stillstand der Figurenachse senkrecht zum äußeren Kardanring.

Im allgemeinen Falle $\varepsilon_e > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_p > 0$ gilt Abb. 3 mit den Werten $u_Q = u^* = 0$, und alle Kurven $\varepsilon_k = 0$ sind Gerade durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, so daß die benachbarten Kurven $\varepsilon_k > 0$ stets auch in den schraffierten Streifen bei $u = 1$ eindringen werden, zumal da sie wegen (5,38), worin $u_Q = 0$ zu setzen ist, offenbar die Geraden $u = \pm 1$ zu Asymptoten haben.

Die Ergebnisse von Ziff. 6 lassen sich ebenso leicht auf $Q = 0$ spezialisieren.

Für trockene Reibung ist jetzt nach (7,11) $s_p = \infty$, so daß kein reeller Winkel δ_p und keine zugehörige Kote u_p existiert. Von den Phasendiagrammen kommmen also nur Abb. 4 für $M_p > M_e$ und Abb. 5 für $M_p < M_e$ in Frage. Das Ergebnis lautet: Ist $M_p \geq M_e$, dann tritt völlige Sperrung der Figurenachse ein; ist $M_p < M_e$, dann tritt völlige Sperrung der Figurenachse für alle spitzen Winkel zwischen der positiven Figurenachse und dem nächstliegenden Halbstrahl der Präzessionsachse ein, welche größer oder gleich δ_q sind: für die kleineren Winkel nähert sich die Figurenachse dem äußeren Kardanring auf kürzestem Wege so, wie vorhin geschildert. Im Falle der Sperrung gilt die zweite Gleichung (7,14) für das Sperrmoment M_p^*.

Von den beiden Sperrungen in Ziff. **8** kommt jetzt natürlich nur die zweite in Betracht, und auch von ihr nur der Fall b) und der Fall d) (da die anderen Fälle schon soeben aufgeführt worden sind), also eine Sperrung $\dot{\delta}$ mit dem Sperrmoment M_k^* (8,6) (mit $Q = 0$) und dem ungesperrten Wert ω_p aus (8,5) (mit dem oberen Vorzeichen von M_p) für jeden spitzen Winkel zwischen der positiven Figurenachse und dem nächstliegenden Halbstrahl der Präzessionsachse, welcher kleiner als δ_q ist.

10. Der Einfluß der Nutationen. Die bisher diskutierten Lösungen stellen Näherungen für den schnellen Kreisel dar, die einerseits auf anschaulich begründeten Vereinfachungen beruhen und andererseits die beobachtbaren Bewegungen insofern idealisieren, als sie die Nutationen der Figurenachse nicht wiedergeben. Es wird daher nützlich sein, wenn wir zum Schluß nun auch die exakten Kreiselgleichungen aufstellen, um erstens ein genaues Bild von den Vernachlässigungen zu gewinnen, welche unsere bisher benützten Gleichungssysteme enthalten, und um zweitens — wenigstens für den Fall flüssiger Reibung — mit Hilfe einer Störungsrechnung zu zeigen, daß die bisher vernachlässigten Nutationen die früheren Ergebnisse nicht modifizieren.

Die exakten Gleichungen können entweder mit dem *Lagrange*schen Verfahren oder aber mit dem Drehimpulssatz in der Form (3,1) gewonnen werden. Wählt man den letzten Weg, dann empfiehlt es sich, (3,1) im Koordinatensystem (e, k, q) zu zerlegen, das (Abb. 1) aus der Figurenachse e, der Knotenachse k und der Querachse q gebildet wird. Beachtet man dabei, daß die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch vektorielle Addition von ω_k und ω_p erhalten wird, dann gewinnt man mit Hilfe von Abb. 1 die Komponentendarstellung

$$\mathfrak{v} = (\omega_p \cos\delta\,,\ \omega_k\,,\ \omega_p \sin\delta)\,. \tag{10,1}$$

für $\mathfrak{v}$. Da das gewählte Koordinatensystem ein Hauptachsensystem des Kreiselkörpers ist, und da sich die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels aus $\mathfrak{v}$ und ω_e zusammensetzt, ergibt sich für den Drehimpulsvektor analog

$$\mathfrak{D} = (A\,(\omega_e + \omega_p \cos\delta)\,,\ B\,\omega_k\,,\ B\,\omega_p \sin\delta)\,, \tag{10,2}$$

und schließlich hat man nach Abb. 1 sowie (4,4)

$$\mathfrak{M} = \left(-M_e\,,\ Q\sin\delta - M_k\,,\ -M_q = \frac{M_e\cos\delta - M_p}{\sin\delta}\right). \tag{10,3}$$

In Komponenten aufgelöst und geordnet lautet (3,1) daher

$$\left.\begin{aligned} A\,(\dot{\omega}_e - \omega_k\,\omega_p \sin\delta + \dot{\omega}_p\cos\delta) &= -M_e\,,\\ B\,\dot{\omega}_k - B\,\omega_p^2\cos\delta\sin\delta + A\,(\omega_e + \omega_p\cos\delta)\,\omega_p\sin\delta &= Q\sin\delta - M_k\,,\\ B\,\dot{\omega}_p\sin^2\delta + 2\,B\,\omega_k\,\omega_p\cos\delta\sin\delta - A\,\omega_k\,(\omega_e + \omega_p\cos\delta)\sin\delta &= M_e\cos\delta - M_p\,. \end{aligned}\right\} \tag{10,4}$$

Ist der Kreisel schnell, so kann man, wie dies seine Definition nahelegt, ω_k/ω_e und ω_p/ω_e als von erster Ordnung kleine Größen behandeln und (10,4) durch Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung auf

$$\left.\begin{aligned} A\,(\dot{\omega}_e + \dot{\omega}_p\cos\delta) &= -M_e\,,\\ B\,\dot{\omega}_k + A\,\omega_e\,\omega_p\sin\delta &= Q\sin\delta - M_k\,,\\ B\,\dot{\omega}_p\sin^2\delta - A\,\omega_e\,\omega_k\sin\delta &= M_e\cos\delta - M_p \end{aligned}\right\} \tag{10,5}$$

reduzieren. Beachtet man, daß $\omega_k = \dot{\delta}$ und nach (10,2) $D_e = A\,(\omega_e + \omega_p\cos\delta)$ ist, dann stellt man leicht fest, daß in der beobachteten Näherung und bei Beschränkung auf trockene Reibung die drei Gleichungen (10,5) der Reihe nach mit (7,1), (8,1) und (8,2) identisch sind, womit nun nachträglich die Ergebnisse von Ziff. **8** von der analytischen Seite her als Näherungen erster Ordnung gerechtfertigt werden. Das Gleichungssystem (4,1) bis (4,4) stellt dagegen eine gröbere

Näherung dar und folgt aus (10,5) mit der weiteren Annahme, daß die Größen $\dot{\omega}_k/\omega_e^2$ und $\dot{\omega}_p/\omega_e^2$ mindestens von zweiter Ordnung klein seien, womit dann auch (wie zu Beginn von Ziff. 5) $D_e = A\,\omega_e$ gesetzt werden kann. Diese Zusatzannahme mag etwa mit der Feststellung gerechtfertigt werden, daß bei annähernd konstantem ω_e (d. h. etwa im Falle $M_e = 0$) ω_k/ω_e und ω_p/ω_e nur dann über größere (d. h. von erster Ordnung große) Zeitintervalle klein von erster Ordnung bleiben können, wenn $\dot{\omega}_k/\omega_e^2$ und $\dot{\omega}_p/\omega_e^2$ klein von höherer Ordnung sind. Mit Rücksicht auf den Vorbehalt $\omega_e \approx$ konst. sowie auf die Möglichkeit, daß $\dot{\omega}_k/\omega_e^2$ und $\dot{\omega}_p/\omega_e^2$ oszillierenden Charakter haben, kann aber dieses Argument keine strenge Gültigkeit beanspruchen, und in der Tat werden ja mit dem System (4,1) bis (4,4) gerade die raschen Oszillationen in Form der Nutationen nicht erhalten.

Wir gehen deshalb von der strengeren Näherung (10,5) aus, wobei wir uns aber vorbehalten, die eben diskutierte Zusatzannahme allenfalls später wieder einzuführen. Das System (10,5) besitzt, falls keine Lagerreibung vorhanden, mithin $M_e = M_k = M_p = 0$ ist, ein partikuläres Integral in Form der regulären Präzession mit den konstanten Bestimmungsstücken

$$\omega_e = \omega_{e0}\,, \qquad \delta = \delta_0\,, \qquad \omega_p = \frac{Q}{A\,\omega_{e0}} = \omega_{p0}\,. \tag{10,6}$$

Die zugehörige Bewegung tritt freilich nur unter speziellen Anfangsbedingungen und nach der dritten Beziehung (10,6) nur unter der Voraussetzung auf, daß $Q/A\,\omega_{e0}^2$ von erster Ordnung klein sei.

Läßt man jetzt kleine Abweichungen von den erwähnten speziellen Anfangsbedingungen und gleichzeitig Reibungsmomente von der Größenordnung des Stützmomentes Q zu, so daß auch $M_e/A\,\omega_{e0}^2$, $M_k/A\,\omega_{e0}^2$ und $M_p/A\,\omega_{e0}^2$ von erster Ordnung kleine Größen sind, dann sind ausschließlich Lösungen zu erwarten, die sich in einem hinreichend beschränkten Zeitintervall nur wenig von (10,6) unterscheiden. Man kann sie in der Form

$$\omega_e = \omega_{e0} + \omega_{e1}\,, \qquad \delta = \delta_0 + \delta_1\,, \qquad \omega_p = \omega_{p0} + \omega_{p1} \tag{10,7}$$

ansetzen, wobei die Größen ω_{e1}/ω_{e0}, δ_1 und ω_{p1}/ω_{e0} als klein von erster Ordnung angenommen werden dürfen. In dieser Näherung gilt

$$\sin\delta = \sin\delta_0 + \delta_1\cos\delta_0\,, \qquad \cos\delta = \cos\delta_0 - \delta_1\sin\delta_0\,, \tag{10,8}$$

und wenn man jetzt (10,7) in (10,5) einsetzt, (10,6) sowie (10,8) berücksichtigt und alle von höherer als erster Ordnung kleinen Größen unterdrückt, erhält man für ω_{e1}, $\omega_{k1} = \dot{\delta}_1$ und ω_{p1} die linearisierten Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,(\dot{\omega}_{e1} + \dot{\omega}_{p1}\cos\delta_0) &= -M_e\,, \\ B\,\dot{\omega}_{k1} + A\,\omega_{e0}\,\omega_{p1}\sin\delta_0 &= -M_k\,, \\ B\,\dot{\omega}_{p1}\sin^2\delta_0 - A\,\omega_{e0}\,\omega_{k1}\sin\delta_0 &= M_e\cos\delta_0 - M_p\,. \end{aligned}\right\} \tag{10,9}$$

Wir gehen jetzt von den Winkelsgeschwindigkeiten $\omega_e = \omega_{e0}$, $\omega_k = 0$, $\omega_p = 0$ aus, die dem mit $Q = 0$ permanent rotierenden Kreisel entsprechen, und setzen die Reibungsmomente als Funktionen der Winkelgeschwindigkeiten voraus, die sich in der Umgebung dieser Werte in so rasch konvergierende Potenzreihen

$$\left.\begin{aligned} M_e(\omega_e) &= M_{e0} + \cdots && [M_{e0} = M_e(\omega_{e0}) > 0]\,, \\ M_k(\omega_k) &= M'_{k0}\,\omega_{k1} + \cdots && [M'_{k0} = M'_k(0) > 0]\,, \\ M_p(\omega_p) &= M'_{p0}\cdot(\omega_{p0} + \omega_{p1}) + \cdots && [M'_{p0} = M'_p(0) > 0] \end{aligned}\right\} \tag{10,10}$$

entwickeln lassen (wobei Striche Ableitungen bedeuten), daß im Rahmen unserer ersten Näherung nur die (angeschriebenen) ersten Glieder zu berücksichtigen sind. Mit dieser Annahme scheidet die trockene Reibung aus, dafür bleibt aber die geschwindigkeitsproportionale flüssige Reibung gemäß Ziff. 5 samt Verallgemeinerungen zugelassen, welche diejenigen von Ziff. 6 in gewissem Sinn ergänzen.

Setzt man (10,10) unter Beschränkung auf Größen, die klein von erster Ordnung sind, in (10,9) ein, dann kommt

$$\left.\begin{aligned} A\,(\dot{\omega}_{p1}\cos\delta_0 + \dot{\omega}_{e1}) + M_{e0} &= 0\,, \\ B\,\dot{\omega}_{k1} + M'_{k0}\,\omega_{k1} + A\,\omega_{e0}\,\omega_{p1}\sin\delta_0 &= 0\,, \\ B\,\dot{\omega}_{p1}\sin^2\delta_0 - A\,\omega_{e0}\,\omega_{k1}\sin\delta_0 + M'_{p0}\,(\omega_{p0} + \omega_{p1}) - M_{e0}\cos\delta_0 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{10,11}$$

Aus der zweiten Beziehung (10,11) folgt jetzt

$$\omega_{p1} = -\frac{B\,\dot{\omega}_{k1} + M'_{k0}\,\omega_{k1}}{A\,\omega_{e0}\sin\delta_0}, \tag{10,12}$$

und wenn man damit in die dritte eingeht, erhält man für ω_{k1} die Differentialgleichung

$$\ddot{\omega}_{k1} + 2\,\gamma\,\dot{\omega}_{k1} + \varkappa^2\,\omega_{k1} + \lambda = 0 \tag{10,13}$$

mit den Beiwerten

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2\,B\sin^2\delta_0}\,(M'_{p0} + M'_{k0}\sin^2\delta_0), \\ \varkappa^2 &= \frac{1}{B^2\sin^2\delta_0}\,(A^2\,\omega_{e0}^2\sin^2\delta_0 + M'_{k0}\,M'_{p0}), \\ \lambda &= \frac{A\,\omega_{e0}}{B^2\sin\delta_0}\,(M_{e0}\cos\delta_0 - M'_{p0}\,\omega_{p0}), \end{aligned}\right\} \tag{10,14}$$

von denen die ersten beiden auf Grund der Nebenbedingungen in (10,10) positiv sind.

Die allgemeinste Lösung von (10,13) lautet

$$\omega_{k1} = -\frac{\lambda}{\varkappa^2} + \cdots, \tag{10,15}$$

wobei die Punkte eine gedämpfte Schwingung andeuten, die offensichtlich den Beitrag der Nutation zur Nickbewegung verkörpert, während der ausgeschriebene Term je nach dem Vorzeichen von λ ein monotones Steigen bzw. Sinken des Schwerpunktes darstellt. Setzt man (10,15) in (10,12) ein, so kommt ferner

$$\omega_{p1} = \frac{M'_{k0}}{A\,\omega_{e0}\sin\delta_0}\,\frac{\lambda}{\varkappa^2} + \cdots, \tag{10,16}$$

wobei auch hier die Punkte für den Nutationsanteil in Form einer gedämpften Schwingung stehen. Schließlich liefert die erste Beziehung (10,11) analog

$$\dot{\omega}_{e1} = -\frac{M_{e0}}{A} + \cdots, \tag{10,17}$$

wobei die Punkte nun den Einfluß der Nutationen auf die Eigendrehgeschwindigkeit andeuten sollen.

Nachdem sich damit herausgestellt hat, daß die durch (10,15) bis (10,17) dargestellte Lösung erster Ordnung die Nutationen enthält, beschränken wir uns auf die Diskussion der (ausgeschriebenen) säkularen Bestandteile, die ja offensichtlich von den Nutationen unabhängig sind. Nach (10,10) ist der zweite Klammerterm in der dritten Beziehung (10,14) mit dem in Ziff. 4 definierten Moment $\bar{M}_p$ identisch, und da man nach (10,10) und (10,8) in unserer Näherung für den ersten Klammerterm auch $M_e\cos\delta$ schreiben kann, ist

$$\lambda \gtrless 0 \quad \text{für} \quad M_e\cos\delta - \bar{M}_p \gtrless 0\,. \tag{10,18}$$

Damit folgt aber aus (10,15) und daraus, daß nach (10,6) $\omega_{k0} = 0$, also $\omega_k = \omega_{k1}$ ist,

$$\omega_k \lessgtr 0 \quad \text{für} \quad M_e\cos\delta \gtrless \bar{M}_p \tag{10,19}$$

und analog aus (10,16)

$$\omega_{p1} \gtrless 0 \quad \text{für} \quad M_e\cos\delta \lessgtr \bar{M}_p\,. \tag{10,20}$$

In (10,19) und (10,20) stecken alle Aussagen von Ziff. 4 über die Nickbewegung und die Präzession. Diese allgemeinen Resultate bleiben demnach in vollem Umfang gültig, auch wenn man auf die Zusatzannahme, daß $\dot{\omega}_k/\omega_{e0}^2$ und $\dot{\omega}_p/\omega_{e0}^2$ von höherer Ordnung klein seien, verzichtet und auf der strengen ersten Näherung (10,5) basiert.

Im Gegensatz hierzu ist festzustellen, daß die säkularen Terme in (10,15) bis (10,17) keine Lösung der Gleichungen (4,1) bis (4,4) darstellen, sondern lediglich gegen eine solche konvergieren, während die Reibungsmomente gegen Null gehen. Es folgt hieraus, daß die quantitativen Ergebnisse von Ziff. 5 bis 7 zwar durch die Nutationen nicht modifiziert werden, aber trotzdem auch innerhalb einer Theorie erster Ordnung nur Näherungen darstellen, die freilich bei kleinen Reibungsmomenten hinreichend genau sein dürften.

11. Versuche. Um die Ergebnisse dieser Arbeit experimentell zu überprüfen, wurde ein von der Firma Schuler & Söhne in Zürich gebauter, durchweg mit Kugellagern ausgerüsteter Kardankreisel ohne Eigenantrieb mit Bremsen versehen, welche die Reibung in den Lagern AA, BB und CC zu vergrößern und damit gegeneinander abzustimmen gestatten. Zur Zeit liegen erst die Ergebnisse einiger qualitativer Vorversuche vor, die indessen die allgemeinen theoretischen Resultate von Ziff. 4 übereinstimmend bestätigen.

So zeigt z. B. der Versuch, daß der Schwerpunkt des Kreisels ohne Schweremoment ($Q = 0$) unter einer positiven Präzession bis in die höchste Lage steigt und unter einer negativen Präzession bis in die tiefste Lage sinkt, je nachdem er ursprünglich gehoben oder gesenkt ist. Das Winkelintervall um $\delta = 90°$, in dem allenfalls Sperrung eintritt, ist ohne künstliche Bremsung klein. Wird die Reibung M_e in den inneren Kardanlagern AA verstärkt, dann verlaufen beide Bewegungen, wie auf Grund von (4,2) bis (4,4) zu erwarten ist, rascher.

Wird ein Schweremoment Q angebracht, dann verschiebt sich die Grenze zwischen Steigen und Fallen des Schwerpunktes in Übereinstimmung mit (4,12) zu spitzen Winkeln δ_q; für einen bestimmten Wert von Q liegt sie beim ungebremsten Kreisel beispielsweise etwa bei 70°. Auch jetzt werden sowohl die Präzession wie die Nickbewegung bei Verstärkung der Reibung in den Lagern AA rascher, während gleichzeitig δ_q im Einklang mit (4,12) gegen 90° geht.

(Eingegangen am 2. Februar 1956.)

Anschriften der Verfasser: Professor Dr. *Richard Grammel*, Stuttgart-N, Robert-Bosch-Str. 101, und Professor Dr. *Hans Ziegler*, Rüschlikon bei Zürich, Weiherweg 6.

Instationäre Wärmespannungen in einer Hohlkugel

Von **R. Trostel**

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit wird der Spannungszustand infolge instationärer rotationssymmetrischer Temperaturfelder in einer Hohlkugel untersucht, deren innere und äußere Oberflächen unter dem Einfluß zeitlich und bis auf die Achsensymmetrie auch örtlich beliebiger thermischer Randwirkungen stehen.

Die Ermittlung eines Wärmespannungszustandes bedingt zunächst die Bestimmung des zugehörigen Temperaturfeldes, und daher wurde in Abschnitt **2** zunächst einiges über das achsensymmetrische Temperaturfeld vorangestellt. Hieran schließt sich in Abschnitt **3** die Ermittlung der Wärmespannungen in einer dicken Hohlkugel an. Das Ziel war die Ermittlung eines oberflächenspannungsfreien Wärmespannungszustandes, der schließlich durch Überlagerung der aus dem sog. thermisch-elastischen Verschiebungspotential[1] hervorgehenden Wärmespannungen mit gewissen, durch *Love*sche Funktionen charakterisierten Randspannungszuständen gefunden werden konnte. In Abschnitt **4** werden die Lösung für den kugelsymmetrischen Fall und einige Näherungsformeln angegeben, während Abschnitt **5** einige kurze Hinweise auf das achsensymmetrische Problem an dünnwandigen Kugeln (Kugelschale) enthält.

2. Das achsensymmetrische Temperaturfeld infolge zeitlich und örtlich beliebig vorgegebener thermischer Randwirkungen an den Oberflächen. a) Grundlagen der Wärmeleitung; die Wärmeleitungsgleichung. Für den rotationssymmetrischen Fall ($\partial\vartheta/\partial\varphi = 0$) lautet die Differentialgleichung der Wärmeleitung in Kugelkoordinaten (Abb. 1)

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\operatorname{ctg}\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\psi^2}\right) = \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a^2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}, \qquad (1)$$

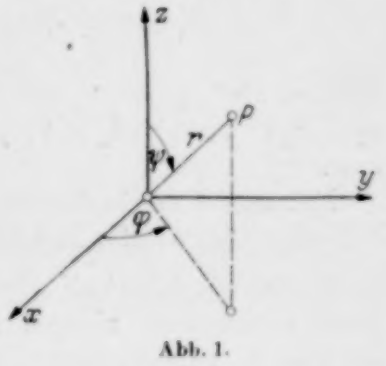

Abb. 1.

wobei c [cal/gr °C] die spezifische Wärmemenge je Gewichtseinheit, γ [gr/cm³] das spezifische Gewicht und λ [cal/cmsec °C] die Wärmeleitzahl bedeuten. Gleichung (1) drückt das Gesetz der Erhaltung der Wärmeenergie aus und zwar mit Verwendung des Fourierschen Wärmeleitungstheorems. Hiernach ist die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtretende Wärmemenge $\mathfrak{q}$ (cal/cm² sec) proportional dem Temperaturgradienten

$$\mathfrak{q} = \{q_r; q_\psi; 0\} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,\vartheta = -\lambda\left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial r};\ \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}; 0\right\}. \qquad (2)$$

Für die Formulierung der Randbedingungen hinsichtlich eines Wärmeüberganges in ein anderes Medium benötigt man noch eine zusätzliche Beziehung, die uns das *Newton*sche Abkühlungstheorem liefert. Entsprechend dem *Fourier*schen Theorem wird hier die aus dem erwärmten Körper in ein umgebendes Medium der Temperatur ϑ_M übergehende Wärmemenge je Flächen- und Zeiteinheit

$$q_{Rand} = \mathfrak{q}_{Rand}\,\mathfrak{n} = -\alpha\,(\vartheta_M - \vartheta_R), \qquad (3)$$

also proportional zur Differenz der Temperaturen des Mediums (ϑ_M) und der Körperoberfläche (ϑ_R) gesetzt. Hierbei ist $\mathfrak{n}$ der Vektor der äußeren Normalen der Körperoberfläche und α [cal/cm²sec °C] die Wärmeübergangszahl.

b) Die Rand- und Anfangsbedingungen. α) *Randbedingungen.* Die in der aufzufindenden Lösung enthaltenen Randwirkungen an den Kugeloberflächen $r = r_i$ bzw. $r = r_a$ sollen mathematisch formuliert sein können:

1. Durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene Randtemperaturen $\vartheta_i(\psi, t)$ bzw. $\vartheta_a(\psi, t)$ der Kugeloberflächen,

2. durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene Temperaturen $\vartheta_{Mi}(\psi, t)$ bzw. $\vartheta_{Ma}(\psi, t)$ der im Innern bzw. am Außenrande befindlichen Medien,

[1] *E. Melan* und *H. Parkus*, Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder. Wien 1953.

3. durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene, durch die Oberflächen der Hohlkugel hindurchtretende Wärmemengen $q_i(\psi, t)$ bzw. $q_a(\psi, t)$ sowie

4. durch Kombinationen zwischen 1., 2. und 3.

Im Falle 1. lauten die Randbedingungen

$$\vartheta(r_i, \psi, t) = \vartheta_i(\psi, t)\,, \qquad \vartheta(r_a, \psi, t) = \vartheta_a(\psi, t) \tag{4a}$$

und im Falle 3. mit (2)

$$-\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi, t} = q_i(\psi, t)\,, \qquad -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi, t} = q_a(\psi, t)\,. \tag{4b}$$

Zur Darstellung der Randbedingungen im Falle 2. kann man zunächst nach (3) für die Oberfläche $r = r_i$, indem man $\mathfrak{q}_{Rand} = \mathfrak{q}(r_i, \psi, t) = \{q_r(r_i, \psi, t);\ q_\psi(r_i, \psi, t);\ 0\}$ und $\mathfrak{n} = \{n_r;\ n_\psi;\ n_\varphi\} = \{-1;\ 0;\ 0\}$ setzt, $\mathfrak{q}_{Rand}\,\mathfrak{n} = -q_r(r_i, \psi, t) = -\alpha\,[\vartheta_{Mi}(\psi, t) - \vartheta(r_i, \psi, t)]$ und entsprechend für die Oberfläche $r = r_a$ schließlich $q_r(r_a, \psi, t) = -\alpha\,[\vartheta_{Ma}(\psi, t) - \vartheta(r_a, \psi, t)]$ folgern, und damit erhält man mit Beachtung von (2)

$$\begin{aligned} q_r(r_i, \psi, t) &= \alpha\,[\vartheta_{Mi}(\psi, t) - \vartheta(r_i, \psi, t)] \\ &= -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi,}\,, \quad q_r(r_a, \psi, t) = -\alpha\,[\vartheta_{Ma}(\psi, t) - \vartheta(r_a, \psi, t)] = -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, \psi, t}\,, \end{aligned}$$

d. h.

$$\vartheta(r_a, \psi, t) + \frac{\lambda}{\alpha} \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, \psi, t} = \vartheta_{Ma}(\psi, t)\,, \qquad \vartheta(r_i, \psi, t) - \frac{\lambda}{\alpha} \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi, t} = \vartheta_{Mi}(\psi, t)\,. \tag{4c}$$

Wir fassen nun sämtliche durch (4a) bis (4c) beschriebenen Randwertprobleme und damit auch den Fall 4. durch folgende allgemeinere Randwertaufgabe, in der jene als Spezialfälle enthalten sind:

$$a_1\,\vartheta(r_a, \psi, t) + a_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, \psi, t} = \varphi_a(\psi, t);\ \ b_1\,\vartheta(r_i, \psi, t) + b_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi, t} = \varphi_i(\psi, t)\,. \tag{5}$$

Hierbei sind a_1, a_2, b_1 und b_2 zunächst willkürliche Konstanten, und indem man beispielsweise $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$, $\varphi_a(\psi, t) = \vartheta_a(\psi, t)$ und $\varphi_i(\psi, t) = \vartheta_i(\psi, t)$ setzt, folgt sofort der Fall 1. usw.

Mit den Randbedingungen (5), von denen im folgenden ausgegangen wird, sind demnach beliebige thermische Randwirkungen an den Kugeloberflächen erfaßt.

β) *Die Anfangsbedingung.* Die Lösung soll einen zur Zeit $t = 0$ gegenüber seiner Umgebung nicht erwärmten Körper zum Gegenstand haben. Bezeichnet man die anfängliche, überall als gleich vorausgesetzte Temperatur der Umgebung mit Null, so lautet also die Anfangsbedingung

$$\vartheta(r, \psi, 0) = 0\,. \tag{6}$$

c) Allgemeine Bemerkungen zur Ermittlung des Temperaturfeldes. Eine unmittelbare Entwicklung der den Rand- und Anfangsbedingungen (5) und (6) angepaßten Lösung für das Temperaturfeld ist nicht möglich. Hierfür muß vorbereitend die Aufgabe gelöst werden, das Temperaturfeld für den Fall zeitlich von $t = 0$ an konstanter Randwirkungen an den Kugeloberflächen zu bestimmen. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten in diesem Falle in Spezialisierung von (5)

$$a_1\,\vartheta(r_a, \psi, t) + a_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, \psi, t} = f_a(\psi), \quad b_1\,\vartheta(r_i, \psi, t) + b_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, \psi, t} = f_i(\psi) \quad \text{für } t > 0\,, \tag{7}$$

$$\vartheta(r, \psi, 0) = 0\,. \tag{8}$$

Diese Aufgabe wird dadurch bewältigt, daß man zunächst das Randwertproblem (7) durch die sog. stationäre Lösung $\vartheta_0(r, \psi)$ befriedigt, und zur stationären Lösung dann noch eine Zusatzlösung $\vartheta_1(r, \psi, t)$ instationären Charakters hinzufügt, die die bereits durch die stationäre Lösung erfüllten Randbedingungen nicht mehr verändert, jedoch nun auch noch zusammen mit $\vartheta_0(r, \psi)$ der Anfangsbedingung (8) Genüge leistet. In der nachfolgenden Ziff. d) erfolgt die Ermittlung der stationären Lösung $\vartheta_0(r, \psi)$, während die Ziff. e der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r, \psi, t)$ gewidmet ist. In Ziff. f wird dann durch Überlagerung von $\vartheta_0(r, \psi)$ mit $\vartheta_1(r, \psi, t)$ die Lösung für die Rand- und Anfangsbedingungen (7) und (8) gewonnen, und schließlich gelingt in Ziff. g) die allgemeine Lösung für zeitlich und örtlich beliebige Randwirkungen an den Kugeloberflächen nach Maßgabe der Rand- und Anfangsbedingungen (5) und (6).

d) Das stationäre Temperaturfeld. α) *Allgemeines*: *Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung.* Im stationären Falle folgt aus (1) wegen $\partial\vartheta_0/\partial t = 0$ die Differentialgleichung

$$\Delta\vartheta_0 = \frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\operatorname{ctg}\psi\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\psi} + \frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial\psi^2}\right) = 0\,.$$

Für ihre in Produktform darstellbaren Lösungen folgen nach Einführung des Produktansatzes $\vartheta_0(r,\psi) = R_0(r)\,\Psi_0(\psi)$ gemäß der *Daniel-Bernoulli*schen Schlußweise mit der Konstanten $n\,(n+1)$ $-\,n = 0, 1, 2, \ldots$ — die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2\frac{d^2R_{0n}}{dr^2} + 2\,r\,\frac{dR_{0n}}{dr} - n\,(n+1)\,R_{0n}(r) = 0\,, \tag{9a}$$

$$\frac{d^2\Psi_{0n}}{d\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi\,\frac{d\Psi_{0n}}{d\psi} + n\,(n+1)\,\Psi_{0n} = 0\,. \tag{9b}$$

Gleichung (9a) ist eine *Euler*sche Differentialgleichung, für deren allgemeine Lösung man schließlich mit dem Ansatz $R_{0n}(r) = A_n\,r^\alpha$

$$R_{0n}(r) = A_{1n}\,r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \tag{10}$$

erhält, während Gleichung (9b)

$$\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{d}{d\psi}\left(\sin\psi\,\frac{d\Psi_{0n}}{d\psi}\right) + n\,(n+1)\,\Psi_{0n}(\psi) = 0$$

mittels der Transformation

$$\Psi_{0n}(\psi) = \Psi_{0n}[\xi(\psi)] \quad\text{mit}\quad \xi(\psi) = \cos\psi\,,\ \text{d. h.}\ 1-\xi^2 = \sin^2\psi\ \text{bzw.}\ \frac{d\xi}{d\psi} = -\sin\psi \tag{11a}$$

in die *Legendre*sche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\,\frac{d\Psi_{0n}}{d\xi}\right] + n\,(n+1)\,\Psi_{0n}(\xi) = 0 \tag{11b}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Psi_{0n}(\xi) = \Psi_{0n}(\cos\psi) = A_{2n}\,P_n(\xi) + B_{2n}\,Q_n(\xi) \tag{11c}$$

überführt werden kann. $P_n(\xi)$ bzw. $Q_n(\xi)$ sind hierbei Kugelfunktionen erster bzw. zweiter Art. Nun sind wegen $|\xi| = |\cos\psi| \leq 1$ die Kugelfunktionen zweiter Art im vorliegenden Falle nicht definiert, so daß anstelle von (11c) als Lösung von (11b)

$$\Psi_{0n}(\xi) = \Psi_{0n}(\cos\psi) = A_{2n}\,P_n(\xi) \tag{11d}$$

verbleibt. Mit $A_{1n}\,A_{2n} = A_n$ und $B_{1n}\,A_{2n} = B_n$ hat man dann die Produktlösung

$$R_{0n}(r)\,\Psi_{0n}(\psi) = \left(A_n\,r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\xi)\,,$$

die wir nun noch in der Form

$$\vartheta_0(r,\cos\psi) = \vartheta_0(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{0n}(r)\,\Psi_{0n}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\,r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\xi) \tag{12}$$

verallgemeinern können. Die Konstanten A_n und B_n $(n = 1, 2, 3\ldots)$ sind nunmehr den Randbedingungen des Problems anzupassen.

β) *Lösung der stationären Randwertaufgabe.* Von der unter Ziff. dα) gefundenen Produktlösung (12) soll nachfolgend entsprechend den Ausführungen der Ziff. c) die Erfüllung folgender Randbedingungen gefordert werden

$$a_1\,\vartheta_0(r_a,\psi) + a_2\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\bigg|_{r_a,\,\psi} = f_a(\psi)\,,\quad b_1\,\vartheta_0(r_i,\psi) + b_2\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\bigg|_{r_i,\,\psi} = f_i(\psi)\,, \tag{13}$$

und da die Randfunktionen f_a und f_i ohne Schwierigkeit in der Form $f_a = f_a(\xi) = f_a(\cos\psi)$ bzw. $f_i = f_i(\xi) = f_i(\cos\psi)$ darstellbar sind, so erhalten wir, indem wir (12) in die Randbedingungen (13) einführen, mit

$$\left.\begin{aligned} A_n\,(a_1\,r_a^n + n\,a_2\,r_a^{n-1}) + B_n\,(a_1\,r_a^{-(n+1)} - (n+1)\,a_2\,r_a^{-(n+2)}) &= c_n^{(a)}\,,\\ A_n\,(b_1\,r_i^n + n\,b_2\,r_i^{n-1}) + B_n\,(b_1\,r_i^{-(n+1)} - (n+1)\,b_2\,r_i^{-(n+2)}) &= c_n^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

folgende Beziehungen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(a)} P_n(\xi) = f_a(\xi) , \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} P_n(\xi) = f_i(\xi) . \tag{15}$$

Mit Beachtung der Orthogonalitätsrelationen[1]

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\xi)\, P_m(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n , \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{für } m = n \end{cases} \tag{16}$$

gewinnt man nunmehr aus (15) folgende Beziehungen für die $c_n^{(a)}$ bzw. $c_n^{(i)}$:

$$c_n^{(a)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f_a(\xi)\, P_n(\xi)\, d\xi , \quad c_n^{(i)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f_i(\xi)\, P_n(\xi)\, d\xi , \tag{17}$$

womit diese und damit auch nach (14) die A_n und B_n als bekannt anzusehen sind. Man erhält schließlich mit

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{(n)} &= \left(a_1 r_a^n + n a_2 r_a^{n-1}\right)\left(b_1 r_i^{-(n+1)} - (n+1) b_2 r_i^{-(n+2)}\right) \\ &\quad - \left(a_1 r_a^{-(n+1)} - (n+1) a_2 r_a^{-(n+2)}\right)\left(b_1 r_i^n + n b_2 r_i^{n-1}\right) , \\ \alpha_n^{(a)} &= \frac{1}{\Delta^{(n)}}\left(b_1 r_i^{-(n+1)} - (n+1) b_2 r_i^{-(n+2)}\right) , \\ \alpha_n^{(i)} &= -\frac{1}{\Delta^{(n)}}\left(a_1 r_a^{-(n+1)} - (n+1) a_2 r_a^{-(n+2)}\right) , \\ \beta_n^{(a)} &= -\frac{1}{\Delta^{(n)}}\left(b_1 r_i^n + n b_2 r_i^{n-1}\right) , \quad \beta_n^{(i)} = \frac{1}{\Delta^{(n)}}\left(a_1 r_a^n + n a_2 r_a^{n-1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

für die Konstanten A_n und B_n

$$A_n = \alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)} , \quad B_n = \beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)} . \tag{19}$$

Die Lösung der stationären Randwertaufgabe ist damit vollständig bestimmt

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0(r, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) r^n + \left(\beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) r^{-(n+1)}\right] P_n(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1n}(r)\, P_n(\xi) , \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

wenn man noch zur Abkürzung $\left(\alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) r^n + \left(\beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) r^{-(n+1)} = \eta_{1n}(r)$ setzt.

e) Die instationäre Zusatzlösung $\vartheta_1(r, \psi, t)$. α) *Allgemeines; Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung.* Die maßgebende Gleichung für das instationäre Temperaturfeld $\vartheta_1(r, \psi, t)$ ist die Differentialgleichung (1), und wir gewinnen hieraus für die in Produktform darstellbaren Lösungen mit dem, die zunächst willkürliche Konstante ω^2 enthaltenden Ansatz

$$\vartheta_1(r, \psi, t) = e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} R(r)\, \Psi(\psi) \tag{21}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Psi}\left(\operatorname{ctg}\psi \frac{d\Psi}{d\psi} + \frac{d^2\Psi}{d\psi^2}\right) = -\omega^2 ,$$

woraus mit der *Bernoulli*schen Schlußweise

$$\frac{r^2}{R_n}\left(\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr} + \omega^2 R_n\right) = -\frac{1}{\Psi_n}\left(\operatorname{ctg}\psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} + \frac{d^2\Psi_n}{d\psi^2}\right) = n(n+1)$$

d. h. die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(\omega^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0 , \tag{22a}$$

$$\frac{d^2\Psi_n}{d\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} + n(n+1)\,\Psi_n = 0 \tag{22b}$$

[1] Siehe z. B.: *R. Rothe* und *I. Szabó*, Höhere Mathematik, Bd. VI, § 8.4. Teubner 1953.

hervorgehen. Während Gleichung (22b) mit (9b) identisch ist, also eine *Legendre*sche Differentialgleichung mit der Lösung

$$\Psi_n(\cos\psi) = \Psi_n(\xi) = A_n P_n(\xi) \tag{23}$$

darstellt, läßt sich die Differentialgleichung (22a) mittels der Transformation von *Lommel*[1] auf eine *Bessel*sche Differentialgleichung reduzieren. Setzt man nämlich

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_n(\omega r)\,, \tag{24}$$

so erhält man hiermit aus (22a) die *Bessel*sche Differentialgleichung

$$f_n'' + \frac{1}{\omega r} f_n' + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{(\omega r)^2}\right) f_n(\omega r) = 0\,, \tag{25}$$

wobei die Striche Ableitungen nach dem Gesamtargument ωr bedeuten, mit der allgemeinen Lösung

$$f_n(\omega r) = C_{1n} J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r) + C_{2n} J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r)\,. \tag{26}$$

Mit (26) steht damit nach (24) die Lösung von (22a) fest, und man erhält das Fundamentalsystem

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_{1n} J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r) + C_{2n} J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r)\right], \tag{27}$$

so daß nunmehr gemäß (21) für die in Produktform darstellbaren Lösungen von (1) mit $\overline{A_n}\, C_{1n} = A_n$ und $\overline{A_n}\, C_{2n} = B_n$ verallgemeinernd

$$\vartheta_1(r,\psi,t) = e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r) + B_n J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r)\right] P_n(\xi) \tag{28}$$

hervorgeht.

β) *Das Randwertproblem des Temperaturfeldes* $\vartheta_1(r,\psi,t)$. Gemäß den Ausführungen der Ziff. c) wird von der durch (28) gegebenen instationären Zusatzlösung verlangt, daß sie bei der nachfolgenden Überlagerung mit der stationären Lösung $\vartheta_0(r,\psi)$ die bereits durch die stationäre Lösung erfüllten Randbedingungen (13) nicht mehr verändert. In diesem Sinne hat man also von $\vartheta_1(r,\psi,t)$ die Erfüllung folgender Randbedingungen zu fordern:

$$a_1\,\vartheta_1(r_a,\psi,t) + a_2 \left.\frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\right|_{r_a,\psi,t} = 0\,, \quad b_1\,\vartheta_1(r_i,\psi,t) + b_2 \left.\frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\right|_{r_i,\psi,t} = 0\,. \tag{29}$$

Diesen kann mit der Lösung (28) offenbar dann genügt werden, wenn man für jedes einzelne Glied (n) der Reihe

$$a_1 R_n(r_a) + a_2 \left.\frac{dR_n}{dr}\right|_{r_a} = 0\,, \quad b_1 R_n(r_i) + b_2 \left.\frac{dR_n}{dr}\right|_{r_i} = 0 \tag{30}$$

oder, ausgeschrieben, das in A_n und B_n lineare homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
&A_n\left[a_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)\right] \\
&\quad + B_n\left[a_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a)\right)\right] = 0\,, \\
&A_n\left[b_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i)\right)\right] \\
&\quad + B_n\left[b_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i)\right)\right] = 0
\end{aligned}\right| \tag{31}$$

[1] Siehe z. B.: *R. Rothe* und *I. Szabó*, Höhere Mathematik, Bd. VI, § 15.10. Teubner 1953.

folgern kann. Damit (31) für von Null verschiedene A_n und B_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ erfüllt ist, ist es notwendig, daß die Nennerdeterminante des Systems (31) verschwindet

$$\begin{aligned}\Delta_n(\omega) = &\left[a_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)\right]\\ &\times\left[b_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_i)\right)\right]\\ &-\left[a_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a)\right)\right]\\ &\times\left[b_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_i)\right)\right] = 0\,, \end{aligned} \tag{32}$$

womit eine transzendente Gleichung für die Eigenwerte ω gewonnen ist, deren Lösungen ω_{kn} $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ für das folgende als bekannt vorausgesetzt werden sollen. Aus dem Gleichungssystem (31) folgt überdies eine Abhängigkeit der Konstanten A_n und B_n in der Form

$$B_n = -A_n \frac{a_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)}{a_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a)\right)},$$

so daß man mit der neuen Konstanten

$$C_n = \frac{A_n}{a_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a)\right)}$$

somit

$$\begin{aligned} R_n(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r) + B_n J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r)\right]\\ &= C_n \frac{1}{\sqrt{r}}\left\{\left[a_1 J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r_a)\right)\right]\right.\\ &\quad\times J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r) - \left[a_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.\left. - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)\right] J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\omega r)\right\} = C_n \Phi_n(\omega r)\,, \end{aligned} \tag{33}$$

und damit für die Lösung (28)

$$\vartheta_1(r, \psi, t) = e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Phi_n(\omega r)\, P_n(\xi) \tag{34}$$

erhält, und da (34) für alle nach (32) berechenbaren Eigenwerte ω_{kn} $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ die gestellten Randbedingungen (29) erfüllt, ist die Lösung (34) in der folgenden Form verallgemeinerungsfähig:

$$\vartheta_1(r, \psi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{kn} \Phi_n(\omega_{kn} r)\, P_n(\xi)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}. \tag{35}$$

Die noch zunächst unbestimmten Konstanten C_{kn} sind der bisher nicht berücksichtigten Anfangsbedingung des Problems vorbehalten.

γ) *Das Anfangswertproblem des Temperaturfeldes* $\vartheta_1(r, \psi, t)$. Wie bereits in c) erwähnt, erfüllt die stationäre Lösung (20) zwar die Randbedingungen (7), jedoch nicht die Anfangsbedingung (8), und es muß daher von der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r, \psi, t)$ verlangt werden, daß sie der Anfangsbedingung

$$\vartheta_1(r, \psi, 0) = -\vartheta_0(r, \psi) \tag{36}$$

genügt, d. h. zur Zeit $t = 0$ gleich der negativen stationären Lösung wird, so daß sich die Wirkungen von $\vartheta_0(r, \psi)$ und $\vartheta_1(r, \psi, t)$ zur Zeit $t = 0$ in der Tat aufheben. Indem man in (36) die Beziehungen (20) und (35) einsetzt, erhält man zunächst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} C_{kn}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r) \right] P_n(\xi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{fn}(r)\; P_n(\xi)\,,$$

woraus für jedes Reihenglied (n)

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{kn}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r) = - \eta_{fn}(r) \tag{37}$$

gefolgert werden kann, und beachtet man nun die Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen $\Phi_n(\omega_{kn}\, r)$

$$\int_{r_i}^{r_a} r^2\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, \Phi_n(\omega_{in}\, r)\, dr = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k\,, \\ \dfrac{r}{2\,\omega_{kn}^2} \left[\left(\omega_{kn}^2\, r^2 - n\,(n+1)\right) \Phi_n^2 + \omega_{kn}\, r\, \Phi_n\, \Phi_n' + \omega_{kn}^2\, r^2\, \Phi_n'^2 \right] \Big|_{r_i}^{r_a} = \delta_{kn} \text{ für } i = k\,, \end{cases} \tag{38}[1]$$

so erhält man schließlich für die in (37) verbliebenen Konstanten C_{in}, indem man beide Seiten von (37) zunächst mit $r^2\, \Phi_n(\omega_{in}\, r)$ multipliziert und hernach in den Grenzen $r_i \leqq r \leqq r_a$ integriert

$$C_{in} = - \frac{1}{\delta_{in}} \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_{fn}(r)\, \Phi_n(\omega_{in}\, r)\, dr \tag{39}$$

und damit letztlich für die instationäre Zusatzlösung aus (35) mit (39)

$$\vartheta_1(r, \psi, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\; P_n(\xi)\; e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t} \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_{fn}(r)\; \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr\,. \tag{40}$$

f) Das Temperaturfeld für die Anfangs- und Randbedingungen (7) und (8). Dieses wird gemäß der vorangegangenen Überlegungen durch Überlagerung der stationären Lösung $\vartheta_0(r, \psi)$ mit der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r, \psi, t)$ gewonnen. Dementsprechend erhält man mit (20) und (40)

$$\begin{aligned} \vartheta(r, \psi, t) &= \vartheta_0(r, \psi) + \vartheta_1(r, \psi, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\eta_{fn}(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}}\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}\, \Phi_n(\omega_{kn} r) \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_{fn}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr \right] P_n(\xi)\,. \end{aligned} \tag{41}$$

g) Die allgemeine Lösung für das achsensymmetrische Temperaturfeld nach Maßgabe der Rand- und Anfangsbedingungen (5) und (6). Für die Bestimmung dieses Temperaturfeldes wird von der Lösung (41) ausgegangen, die man mit

$$\eta_{fn}^{(i)}(r) = \alpha_n^{(i)}\, r^n + \beta_n^{(i)}\, r^{-(n+1)} \quad \text{und} \quad \eta_{fn}^{(a)}(r) = \alpha_n^{(a)}\, r^n + \beta_n^{(a)}\, r^{-(n+1)}$$

in der Form

$$\begin{aligned} \vartheta(r, \psi, t) = &\sum_{n=0}^{\infty} \left[\eta_{fn}^{(i)}(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}}\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r) \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_{fn}^{(i)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr \right] c_n^{(i)}\; P_n(\xi) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\eta_{fn}^{(a)}(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}}\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r) \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_{fn}^{(a)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr \right] c_n^{(a)}\; P_n(\xi) \end{aligned} \tag{42}$$

[1] Die Striche deuten wieder Ableitungen nach dem Gesamtargument $\omega_{kn} r$ an.

schreiben kann. Sie charakterisiert ein Temperaturfeld zur Zeit t infolge der zur Zeit $t=0$ einsetzenden und zeitlich konstanten mittels der Funktionen $f_a(\xi)$ bzw. $f_i(\xi)$ gekennzeichneten Randwirkungen. Im Falle zeitlich veränderlicher Randwirkungen $\varphi_a(\xi,t)$ bzw. $\varphi_i(\xi,t)$ sind nun die *Fourier*koeffizienten $c_n^{(a)}$ bzw. $c_n^{(i)}$ nicht mehr konstant, sondern Funktionen der Zeit, was sofort aus den Entwicklungen von $\varphi_a(\xi,t)$ bzw. $\varphi_i(\xi,t)$ nach den Eigenfunktionen $P_n(\xi)$ hervorgeht — man erhält aus

$$\varphi_a(\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(a)}\ P_n(\xi)\,,\qquad \varphi_i(\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)}\ P_n(\xi) \tag{43a}$$

wegen (16)

$$c_n^{(a)}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_a(\xi,t)\ P_n(\xi)\,d\xi=c_n^{(a)}(t)\,,\quad c_n^{(i)}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_i(\xi,t)\ P_n(\xi)\,d\xi=c_n^{(i)}(t)\,, \tag{43b}$$

also zeitabhängige Koeffizienten — und es entstehen nun während eines beliebigen Zeitelementes $d\tau$ die Zusatzwirkungen

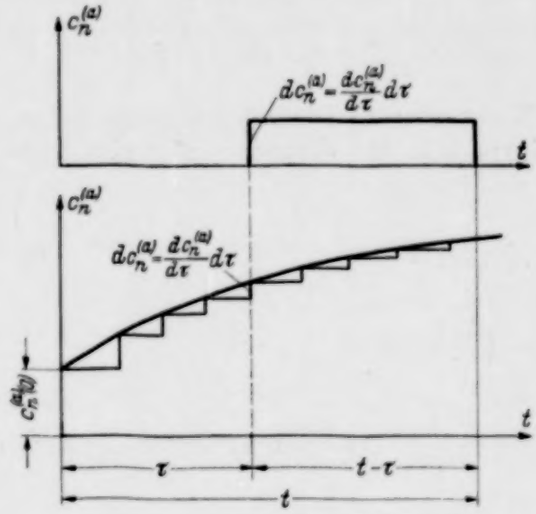

Abb. 2.

$$\partial_t\varphi_a(\xi,\tau)=\frac{\partial\varphi_a}{\partial\tau}d\tau\quad\text{bzw.}\quad \partial_t\varphi_i(\xi,\tau)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}d\tau\,,$$

d. h. die Zuwächse

$$dc_n^{(a)}=\frac{dc_n^{(a)}}{d\tau}d\tau\quad\text{bzw.}\quad dc_n^{(i)}=\frac{dc_n^{(i)}}{d\tau}d\tau\,.$$

Betrachten wir nun vereinfachend zunächst allein Änderungen am äußeren Rande, und nehmen wir an, daß eine zur Zeit τ entstandene Wirkung $dc_n^{(a)}(\tau)$ von nun an zeitlich konstant weiterwirken würde (s. die obere Figur der Abb. 2), so würde hierdurch das zur Zeit t (nachdem also $t-\tau$ Sekunden nach Einsetzen der Randwirkung $dc_n^{(a)}$ vergangen sind) vorhandene Temperaturfeld mittels der Lösung (42) dadurch erfaßt werden können, daß man in ihr $c_n^{(a)}$ durch $dc_n^{(a)}$ sowie t durch $t-\tau$ ersetzt und $c_n^{(i)}=0$ setzt:

$$d\vartheta^{(a)}(r,\psi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma_{/n}^{(a)}(r)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{kn}}\,e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\int_{r_i}^{r_a}r^2\,\gamma_{/n}^{(a)}(r)\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\,dr\right]P_n(\xi)\,\frac{dc_n^{(a)}}{d\tau}\,d\tau\,.$$

Die Gesamtwirkung zur Zeit t kann man sich nun entstanden denken durch Summation sämtlicher, während der einzelnen Zeitintervalle $d\tau$ entstandenen Elementarwirkungen $dc_n^{(a)}$ zuzüglich der Anfangswirkung $c_n^{(a)}(0)$ (Abb. 2), womit man

$$\vartheta^{(a)}(r,\psi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma_{/n}^{(a)}(r)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{kn}}\,e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\int_{r_i}^{r_a}r^2\,\gamma_{/n}^{(a)}(r)\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\,dr\right]P_n(\xi)\,c_n^{(a)}(0)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\left[\gamma_{/n}^{(a)}(r)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{kn}}\,e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\int_{r_i}^{r_a}r^2\,\gamma_{/n}^{(a)}\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\,dr\right]P_n(\xi)\,\frac{dc_n^{(a)}}{d\tau}\,d\tau\,,$$

d. h.

$$\vartheta^{(a)}(r,\psi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma_{/n}^{(a)}(r)\,c_n^{(a)}(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{kn}}\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\left(c_n^{(a)}(0)\,e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t}+\int_0^t e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,\frac{dc_n^{(a)}}{d\tau}\,d\tau\right)\right.$$

$$\left.\times\int_{r_i}^{r_a}r^2\,\gamma_{/n}^{(a)}(r)\,\Phi_n(\omega_{kn}r)\,dr\right]P_n(\xi)$$

erhält. Beachtet man nun noch die Relation

$$c_n^{(a)}(0)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)} \frac{dc_n^{a)}}{d\tau}\, d\tau = c_n^{(a)}(t) - \left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 \int_0^t c_n^{(a)}(\tau)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, d\tau\,,$$

die sich mittels der partiellen Integrationsregel verifizieren läßt, so folgt

$$\vartheta^{(a)}(r,\psi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\eta_n^{(a)}(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}} \Phi_n(\omega_{kn}\, r) \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_n^{(a)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr \right] c_n^{(a)}(t)\, P_n(\xi)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{kn}^2}{a^2\, \delta_{kn}} \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, P_n(\xi) \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_n^{(a)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, c_n^{(a)}(\tau)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau\,.$$

Nun verschwindet jedoch das erste Glied dieser Formel, da der in diesem auftretende Summenausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{kn}} \Phi_n(\omega_{kn}\, r) \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_n^{(a)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, dr$$

gerade die Entwicklung der Funktion $\eta_n^{(a)}(r)$ [siehe (37) und (39)] nach den Eigenfunktionen $\Phi_n(\omega_{kn}\, r)$ darstellt, und damit verbleibt

$$\vartheta^{(a)}(r,\psi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{kn}^2}{a^2\, \delta_{kn}} \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, P_n(\xi) \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} r^2\, \eta_n^{(a)}(r)\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, c_n^{(a)}(\tau)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau\,.$$

Ersetzen wir in dieser Formel $c_n^{(a)}(\tau)$ durch $c_n^{(i)}(\tau)$ sowie $\eta_n^{(a)}(r)$ durch $\eta_n^{(i)}(r)$, so haben wir die Lösung für das Temperaturfeld bei alleiniger thermischer Innenrandwirkung, und schließlich gewinnen wir für das Temperaturfeld infolge des Einflusses zeitlich und bis auf die Achsensymmetrie auch örtlich beliebig veränderlicher thermischer Randwirkungen an den beiden Hohlkugel-Oberflächen

$$\vartheta(r,\psi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{kn}^2}{a^2\, \delta_{kn}} \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, P_n(\xi) \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} r^2\, [c_n^{(a)}(\tau)\, \eta_n^{(a)}(r) +$$

$$+ c_n^{(i)}(\tau)\, \eta_n^{(i)}(r)]\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau$$

mit

$$\xi = \cos\psi\,,$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$D_{kn} = \frac{\omega_{kn}^2}{a^2\, \delta_{kn}},\quad T_{kn}(t) = \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} r^2\, [c_n^{(a)}(\tau)\, \eta_n^{(a)}(r) + c_n^{(i)}(\tau)\, \eta_n^{(i)}(r)]\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, e^{-\left(\frac{\omega_{kn}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau \qquad (44)$$

einfach

$$\vartheta(r,\psi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\, \Phi_n(\omega_{kn}\, r)\, P_n(\xi)\, T_{kn}(t)\,,\quad \xi = \cos\psi\,. \qquad (45)$$

3. Der achsensymmetrische Wärmespannungszustand der dicken Hohlkugel. a) Allgemeines; das thermisch-elastische Verschiebungspotential. Das im Abschnitt **2** behandelte achsensymmetrische Temperaturfeld verursacht einen achsensymmetrischen Wärmespannungszustand. Sämtliche Spannungs- und Deformationsgrößen sind somit unabhängig vom Polarwinkel φ, so daß sich die allgemeinen Spannungs- und Deformationsgleichungen bereits erheblich vereinfachen, zumal die Rotationssymmetrie das Verschwinden der Tangentialverschiebungen u (im Sinne des Winkels φ) sowie der Schubspannungen $\tau_{r\varphi}$ und $\tau_{\psi\varphi}$ bedingt (Abb. 3). Um zu den für die Behandlung des Problems maßgebenden Beziehungen zu gelangen, werden die *Hooke*schen

Gesetze sowie die Gleichgewichtsbedingungen am Element herangezogen. Die Massenbeschleunigungen infolge des zeitlich veränderlichen Temperatur- und damit Spannungsfeldes bleiben unberücksichtigt, d. h., es werden zu jedem Zeitaugenblick statische Verhältnisse vorausgesetzt.

Es verbleiben im rotationssymmetrischen Falle die Gleichgewichtsbedingungen, wenn man noch, um unnötige Indizes zu ersparen, $\tau_{r\psi} = \tau$ schreibt,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\psi\,\sigma_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}(r^2\sin\psi\,\tau) - r\sin\psi\,(\sigma_\varphi + \sigma_\psi) = 0\,, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}(r^2\sin\psi\,\sigma_\psi) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\psi\,\tau) + r\sin\psi\,\tau - r\cos\psi\,\sigma_\varphi = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

sowie die thermisch-elastischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_\psi)] + \alpha_t\vartheta,\ \varepsilon_\varphi = \frac{v}{r} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi = \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_\psi)] + \alpha_t\vartheta\,, \\ &\varepsilon_\psi = \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} = \frac{1}{E}[\sigma_\psi - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] + \alpha_t\vartheta,\ \gamma_{r\psi} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{w}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau\,, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

wobei E den Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktion und α_t den Wärmeausdehnungskoeffizienten bedeuten, und mit v und w die Verschiebungen in radialer bzw. im Sinne von ψ tangentialer Richtung bezeichnet werden. Aus diesen sechs Gleichungen können die sechs Unbekannten σ_r, σ_φ, σ_ψ, τ, v und w berechnet werden, wobei hier entsprechend der geringeren Anzahl unbekannter Verschiebungsgrößen der Weg der Elimination der Spannungen beschritten werden soll. Demgemäß werden mittels der Deformationsgleichungen (47) zunächst die Spannungen in Abhängigkeit von den Verschiebungen dargestellt

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t\vartheta\right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{v}{r} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t\vartheta\right], \\ \sigma_\psi &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t\vartheta\right], \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{w}{r}\right] \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und nunmehr in die beiden Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt, womit nach einiger Rechnung folgende zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die Radial- und Tangentialverschiebungen v und w entstehen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\vartheta\right] + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{2r^2}\left[\operatorname{ctg}\psi + \frac{\partial}{\partial\psi}\right]\left[\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\,w)\right] = 0\,, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\vartheta\right] + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,w) - \frac{\partial v}{\partial\psi}\right] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichungen gewinnt man durch Einführung des sog. thermisch-elastischen Verschiebungspotentials $F = F(r,\psi,t)$ in der Form

$$v = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad w = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\psi}, \tag{50}$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi = \Delta F\,,$$

womit die Gleichungen (49) in

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\Delta F - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\vartheta\right] = 0\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\Delta F - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\vartheta\right] = 0$$

übergehen, so daß wir hieraus die *Poisson*sche Gleichung

$$\Delta F = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\vartheta \tag{51}$$

folgern können. Ist zunächst ohne die Berücksichtigung der Spannungs-Randbedingungen ein partikuläres Integral der Gleichung (51) gefunden, so ergeben sich nach (48) mit Berücksichtigung von (51) folgende, im allgemeinen den Randbedingungen nicht genügende Wärmespannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\vartheta\,, \quad \sigma_\varphi^{(1)} = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\psi\frac{\partial F}{\partial \psi}\right) - \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\vartheta\,, \\ \sigma_\psi^{(1)} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}\right) - \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\vartheta\,, \quad \tau^{(1)} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \psi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

b) Der Randspannungszustand; die *Lovesche* Funktion. Da der nach (52) berechenbare Wärmespannungszustand 1 im allgemeinen die Randbedingungen nicht erfüllt, ist diesem ein zusätzlicher Spannungszustand zu überlagern, der die infolge des Zustandes 1 hervor-

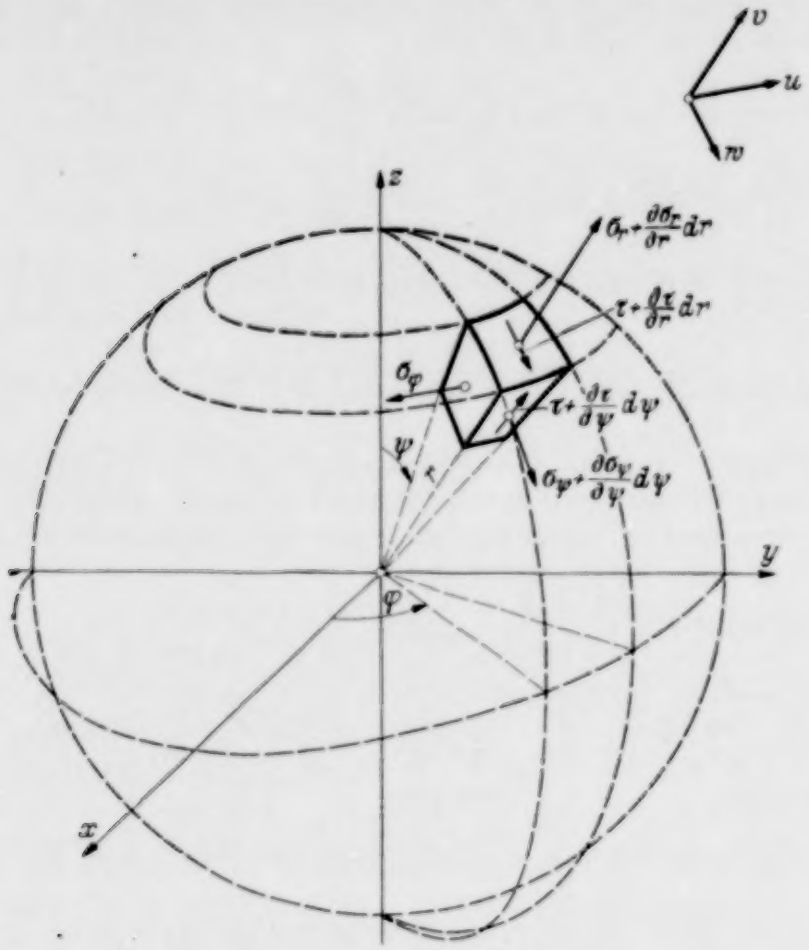

Abb. 3.

gerufenen Randspannungen an die tatsächlichen Gegebenheiten anpaßt. Dieser Zusatzspannungszustand rührt also allein von Oberflächenspannungen her, und seine weitere Verfolgung ist somit ein reines elastizitätstheoretisches Problem. Die maßgebenden Gleichungen sind demnach durch die beiden Verschiebungsgleichungen (49) gegeben, sofern man dort $\vartheta = 0$ setzt. In diesem Falle führt man zur Lösung der Verschiebungsgleichungen die *Lovesche* Verschiebungsfunktion $L(r,\psi,t)$ ein. Man definiert sie mit

$$\square = \cos\psi\,\frac{\partial}{\partial r} - \sin\psi\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \psi} \tag{53a}$$

in folgender Form durch ihre partiellen Ableitungen

$$v = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta L\cos\psi - \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\square L\,, \quad w = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta L\sin\psi - \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \psi}\square L\,, \tag{53b}$$

und erhält zunächst

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\,w) &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}r\left[\cos\psi\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \psi} + \sin\psi\,\frac{\partial}{\partial r}\right]\Delta L\,, \\ \frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\psi &= \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\square\Delta - \frac{1}{1-2\nu}\Delta\square\right]L\,, \end{aligned}\right\} \tag{53c}$$

und damit sowie unter Beachtung von[1]

$$\Box\, \Delta L = \Delta \Box\, L \tag{53d}$$

aus den beiden Verschiebungsgleichungen (49) die Beziehungen

$$\cos\psi\, \Delta\Delta L = 0\,,$$
$$-\sin\psi\, \Delta\Delta L = 0\,,$$

woraus wegen der Beliebigkeit von ψ die Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta L = 0 \tag{54}$$

gefolgert werden kann. Ist eine geeignete, den Randbedingungen des Problems genügende Lösung der Gleichung (54) gefunden, so folgt für die zugehörigen Spannungen aus (48), worin wieder $\vartheta = 0$ zu setzen ist, mit (53a) bis (53d)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2(1-\nu)\cos\psi\,\frac{\partial}{\partial r}\Delta L - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Box\, L + \nu\,\Delta\Box\, L\right],\\
\sigma_\varphi &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\,\Delta\Box\, L - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\Box\, L\right],\\
\sigma_\psi &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\,\Delta\Box\, L - 2(1-\nu)\sin\psi\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta L - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right)\Box\, L\right],\\
\tau &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\left(\cos\psi\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi} - \sin\psi\,\frac{\partial}{\partial r}\right)\Delta L - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\Box\, L\right].
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

c) Das partikuläre Integral der *Poisson*schen Gleichung (51). Die Auffindung einer partikulären Lösung $F(r,\psi,t)$ wird durch die Struktur der Lösung (45) für das Temperaturfeld außerordentlich vereinfacht. Zerlegt man die Funktion F in Teilfunktionen F_{kn} in der Form

$$F = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} F_{kn}\,, \tag{56}$$

so kann (51) mit (45) auch in der Gestalt

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} F_{kn} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\,\Phi_n(\omega_{kn}\,r)\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t) \tag{57}$$

geschrieben werden, und dieses ist immer erfüllt, wenn für jedes Glied (k,n) der Doppelsumme

$$\Delta F_{kn} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\, D_{kn}\,\Phi_n(\omega_{kn}\,r)\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t) \tag{58}$$

besteht. Zur Lösung von (58) wird mit der zunächst unbestimmten Konstanten γ_{kn}

$$F_{kn} = \gamma_{kn}\,\Phi_n(\omega_{kn}\,r)\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t) \tag{59}$$

gesetzt, und da für die Funktionen $\Phi_n(\omega_{kn}\,r)$ und die Kugelfunktionen $P_n(\xi)$ nach (22a, b) die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi_n}{dr} = -\left(\omega_{kn}^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\Phi_n(\omega_{kn}\,r)\,,\quad \frac{1}{r^2}\frac{d^2P_n}{d\psi^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\psi\,\frac{dP_n}{d\psi} = -\frac{n(n+1)}{r^2}P_n \tag{60}$$

bestehen, ergibt sich, sofern der Ansatz (59) in (58) eingeführt wird, mit Beachtung von (60) schließlich für die Konstante

$$\gamma_{kn} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{D_{kn}}{{\omega_{kn}}^2}\,,$$

und damit für das partikuläre Integral der *Poisson*schen Gleichung (51)

$$F = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} F_{kn} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_{kn}}{{\omega_{kn}}^2}\,\Phi_n(\omega_{kn}\,r)\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t)\,. \tag{61}$$

[1] Was durch entsprechendes Ausdifferenzieren bestätigt werden kann.

Für die Spannungen dieses durch das thermisch-elastische Verschiebungspotential gegebenen Grundzustandes *1* erhält man also gemäß[1] (52)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\left[\Phi_n(\omega_{kn}r)+\Phi_n''(\omega_{kn}r)\right]P_n(\xi)\,T_{kn}(t)\,,\\
\sigma_\vartheta^{(1)} &= -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\left[\left(\Phi_n(\omega_{kn}r)+\frac{1}{\omega_{kn}r}\Phi_n'(\omega_{kn}r)\right)P_n(\xi)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{(\omega_{kn}r)^2}\operatorname{ctg}\psi\frac{dP_n}{d\psi}\Phi_n(\omega_{kn}r)\right]T_{kn}(t)\,,\\
\sigma_\psi^{(1)} &= -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\left[\left(\Phi_n(\omega_{kn}r)+\frac{1}{\omega_{nk}r}\Phi_n'(\omega_{kn}r)\right)P_n(\xi)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{(\omega_{kn}r)^2}\frac{d^2P_n}{d\psi^2}\Phi_n(\omega_{kn}r)\right]T_{kn}(t)\,,\\
\tau^{(1)} &= -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{kn}\left[\frac{1}{\omega_{kn}r}\Phi_n'(\omega_{kn}r)-\frac{1}{(\omega_{kn}r)^2}\Phi_n(\omega_{kn}r)\right]\frac{dP_n}{d\psi}\,T_{kn}(t)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{62}$$

und speziell folgt daraus für die Radial- und Schubspannungen an den Oberflächen $r=r_i$ bzw. $r=r_a$ der Kugel mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
d_{kn}^{(i)} &= \frac{E\alpha_t}{1-\nu}D_{kn}\left[\Phi_n(\omega_{kn}r_i)+\Phi_n''(\omega_{kn}r_i)\right],\quad d_{kn}^{(a)} = \frac{E\alpha_t}{1-\nu}D_{kn}\left[\Phi_n(\omega_{kn}r_a)+\Phi_n''(\omega_{kn}r_a)\right],\\
e_{kn}^{(i)} &= \frac{E\alpha_t}{1-\nu}D_{kn}\left[\frac{\Phi_n'(\omega_{kn}r_i)}{\omega_{kn}r_i}-\frac{\Phi_n(\omega_{kn}r_i)}{(\omega_{kn}r_i)^2}\right],\quad e_{kn}^{(a)} = \frac{E\alpha_t}{1-\nu}D_{kn}\left[\frac{\Phi_n'(\omega_{kn}r_a)}{\omega_{kn}r_a}-\frac{\Phi_n(\omega_{kn}r_a)}{(\omega_{kn}r_a)^2}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

einfach

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r_i,\psi,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_{rkn}^{(1)}(r_i,\psi,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_{kn}^{(i)}\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t)\,,\\
\sigma_r^{(1)}(r_a,\psi,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_{rkn}^{(1)}(r_a,\psi,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_{kn}^{(a)}\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t)\,,\\
\tau^{(1)}(r_i,\psi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{kn}^{(1)}(r_i,\psi,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_{kn}^{(i)}\frac{dP_n}{d\psi}\,T_{kn}(t)\,,\\
\tau^{(1)}(r_a,\psi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{kn}^{(1)}(r_a,\psi,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_{kn}^{(a)}\frac{dP_n}{d\psi}\,T_{kn}(t)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

d) Der Randspannungszustand zur Erreichung randspannungsfreier Oberflächen. Im folgenden wird es sich darum handeln, mit Hilfe eines bestimmten, zu überlagernden Randspannungszustandes *2* resultierend einen oberflächenspannungsfreien Wärmespannungszustand zu erzeugen, d.h., die durch (64) gegebenen und an der Kugel ein Gleichgewichtssystem bildenden Oberflächenspannungen zum Verschwinden zu bringen. Dieses kann man erreichen, wenn man der Oberflächenspannungsfreiheit bei jedem einzelnen Glied (k,n) der in (64) vorliegenden Reihenentwicklungen Rechnung trägt. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf ein Glied (k,n). Die Verallgemeinerung auf sämtliche Reihenglieder bietet dann keine Schwierigkeit.

Die maßgebende Beziehung für die Untersuchung eines solchen Randspannungszustandes ist die Differentialgleichung (54) für die *Love*sche Funktion $L_{kn}^{(2)}(r,\psi,t)$. Zur Lösung von (54) wird zunächst

$$\Delta L_{kn}^{(2)} = \bar{L}_{kn}^{(2)}(r,\psi,t)\tag{65}$$

gesetzt, womit (54) die Form

$$\Delta\Delta L_{kn}^{(2)} = \Delta\left(\Delta L_{kn}^{(2)}\right) = \Delta\bar{L}_{kn}^{(2)} = 0\tag{66}$$

[1] Die Striche deuten Ableitungen nach dem Gesamtargument $\omega_{kn}r$ an.

annimmt. Für $\bar{L}^{(2)}_{kn}(r,\psi,t)$ wird nun ein Produktansatz in der Gestalt

$$\bar{L}^{(2)}_{kn}(r,\psi,t) = T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu} + p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right]P_{\mu}(\xi) \tag{67}$$

benutzt, wobei die $p_{1\mu}$ und $p_{2\mu}$ willkürliche Konstanten sind. Dieser Ansatz befriedigt wegen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right)=\frac{\mu(\mu+1)}{r^2}\left(p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right)$$

und

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2P_\mu}{d\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\,\frac{dP_\mu}{d\psi}\right)=-\frac{\mu(\mu+1)}{r^2}\,P_\mu$$

die Differentialgleichung (66) identisch, und man hat demnach für die *Love*sche Funktion nach (65) die Differentialgleichung

$$\Delta L^{(2)}_{kn} = T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right]P_{\mu}(\xi)\,. \tag{68}$$

Zu ihrer Lösung wird mit den noch unbestimmten Funktionen $R^{(k,n)}_{\mu}(r)$ der Ansatz

$$L^{(2)}_{kn}(r,\psi,t) = T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}R^{(k,n)}_{\mu}(r)\,P_{\mu}(\xi) \tag{69}$$

versucht, und indem man diesen in (68) einführt, kann man für jedes einzelne Reihenglied μ

$$\Delta\left[R^{(k,n)}_{\mu}(r)\,P_{\mu}(\xi)\right]=\left(p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right)P_{\mu}(\xi)$$

folgern. Hieraus erhält man schließlich unter Beachtung von

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2P_\mu}{d\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\,\frac{dP_\mu}{d\psi}\right)=-\frac{\mu(\mu+1)}{r^2}\,P_\mu$$

folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $R^{(k,n)}_{\mu}(r)$:

$$\frac{d^2R^{(k,n)}_{\mu}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR^{(k,n)}_{\mu}}{dr}-\frac{\mu(\mu+1)}{r^2}R^{(k,n)}_{\mu}(r)=p^{(k,n)}_{1\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{2\mu}\,r^{-(\mu+1)}\,. \tag{70}$$

Ihre Lösung setzt sich aus dem Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, wofür mit den willkürlichen Konstanten $p^{(k,n)}_{3\mu}$ und $p^{(k,n)}_{4\mu}$

$$p^{(k,n)}_{3\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{4\mu}\,r^{-(\mu+1)}$$

geschrieben werden kann, und einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung (70) zusammen, das mittels der Methode der Variation der Konstanten gefunden wird. Man erhält schließlich für die gesamte Lösung der Gleichung (70)

$$R^{(k,n)}_{\mu}(r)=\frac{p^{(k,n)}_{1\mu}}{2(2\mu+3)}\,r^{\mu+2}-\frac{p^{(k,n)}_{2\mu}}{2(2\mu-1)}\,r^{-(\mu-1)}+p^{(k,n)}_{3\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{4\mu}\,r^{-(\mu+1)}\,,$$

so daß für die *Love*sche Funktion $L_{kn}(r,\psi,t)$ nach (69)

$$L^{(2)}_{kn}(r,\psi,t)=T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[\frac{p^{(k,n)}_{1\mu}}{2(2\mu+3)}\,r^{\mu+2}-\frac{p^{(k,n)}_{2\mu}}{2(2\mu-1)}\,r^{-(\mu-1)}+p^{(k,n)}_{3\mu}\,r^{\mu}+p^{(k,n)}_{4\mu}\,r^{-(\mu+1)}\right]P_{\mu}(\xi) \tag{71}$$

hervorgeht. Nach (55) können nun mit (71) die Spannungen angegeben werden. Man erhält beispielsweise für die Radial- und Schubspannungen nach einigen Rechnungen und unter Beachtung der Rekursionsformeln[1]

$$(\mu+1)\,P_{\mu+1}(\xi)-2(\mu+1)\,\xi\,P_{\mu}(\xi)+\mu\,P_{\mu-1}(\xi)=0\,,\quad(\xi^2-1)\,P'_{\mu}(\xi)=\mu\,[\xi\,P_{\mu}(\xi)-P_{\mu-1}(\xi)]\,,$$
$$\xi\,P'_{\mu}(\xi)-P'_{\mu-1}(\xi)=\mu\,P_{\mu}(\xi)\,,\quad P'_{\mu+1}(\xi)-P'_{\mu-1}(\xi)=(2\mu+1)\,P_{\mu}(\xi)\,,$$
$$P'_{\mu+1}(\xi)-\xi\,P'_{\mu}(\xi)=(\mu+1)\,P_{\mu}(\xi)$$

[1] Siehe z. B.: *J. Lense*, Kugelfunktionen. Leipzig 1950. Die Striche deuten Ableitungen nach dem Argument $\xi=\cos\psi$ an. $P_{-1}(\xi)$ ist Null zu setzen.

schließlich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E(\mu+1)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{p_{1\mu}^{(k,n)}\,\mu}{2\mu+1}\left(\frac{3\mu+5}{2\mu+3}-2\nu\right)r^{\mu-1}+\frac{p_{2\mu}^{(k,n)}}{2(2\mu+1)}\left(2\nu-(\mu+1)(\mu+4)\right)r^{-(\mu+2)}\right.\\
&\qquad\left.+\,p_{4\mu}^{(k,n)}(\mu+2)(\mu+3)\,r^{-(\mu+4)}\right]=\bar{f}_{\mu}^{(k,n)}(r)\,,\\
&\frac{E\mu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{p_{1\mu}^{(k,n)}}{2(2\mu+1)}\left(2\nu-\mu(\mu-3)\right)r^{\mu-1}+p_{2\mu}^{(k,n)}\frac{\mu+1}{2\mu+1}\left(2\nu-\frac{3\mu-2}{2\mu-1}\right)r^{-(\mu+2)}\right.\\
&\qquad\left.-\,p_{3\mu}^{(k,n)}(\mu-1)(\mu-2)\,r^{\mu-3}\right]=\bar{\bar{f}}_{\mu}^{(k,n)}(r)\,,\\
&\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{p_{1\mu}^{(k,n)}}{2\mu+1}\left(2(1-\nu)-\frac{\mu(\mu+1)}{2\mu+3}\right)r^{\mu-1}+\frac{p_{2\mu}^{(k,n)}}{2\mu+1}\left(\frac{(\mu+1)^2}{2(2\mu-1)}-(1-\nu)\right)r^{-(\mu+2)}\right.\\
&\qquad\left.-\,p_{4\mu}^{(k,n)}(\mu+1)(\mu+3)\,r^{-(\mu+4)}\right]=\bar{g}_{\mu}^{(k,n)}(r)\,,\\
&\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{p_{1\mu}^{(k,n)}}{2\mu+1}\left((1-\nu)-\frac{\mu^2}{2}\right)r^{\mu-1}+p_{2\mu}^{(k,n)}\frac{\mu+1}{2\mu+1}\left(2(1-\nu)-\frac{\mu}{2\mu-1}\right)r^{-(\mu+2)}\right.\\
&\qquad\left.-\,p_{3\mu}^{(k,n)}\mu(\mu-2)\,r^{\mu-3}\right]=\bar{\bar{g}}_{\mu}^{(k,n)}(r)
\end{aligned}\right\}\tag{72}$$

folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{r\,kn}^{(2)}&=T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\bar{f}_{\mu}^{(k,n)}(r)\;P_{\mu+1}+\bar{\bar{f}}_{\mu}^{(k,n)}(r)\;P_{\mu-1}\right)\\
&=T_{kn}(t)\left[\bar{\bar{f}}_{1}^{(k,n)}(r)\;P_0+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r)+\bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r)\right)P_{\mu}\right],\\
\tau_{kn}^{(2)}&=T_{kn}(t)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\bar{g}_{\mu}^{(k,n)}(r)\frac{dP_{\mu+1}}{d\varphi}+\bar{\bar{g}}_{\mu}^{(k,n)}(r)\frac{dP_{\mu-1}}{d\varphi}\right)\\
&=T_{kn}(t)\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{g}_{\mu-1}^{(k,n)}(r)+\bar{\bar{g}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r)\right)\frac{dP_{\mu}}{d\varphi}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

Indem man nun von diesen Spannungen des Zustandes 2 fordert, daß sie an den Kugeloberflächen $r=r_i$ bzw. $r=r_a$ die entsprechenden Reihenglieder (k,n) der Spannungen des Zustandes 1 zum Verschwinden bringen sollen, erhält man mit (64) die Gleichungen

$$\sigma_{r\,kn}^{(2)}=-\sigma_{r\,kn}^{(1)},\ \text{d. h.}\ \left\{\begin{aligned}
&\bar{\bar{f}}_{1}^{(k,n)}(r_i)\;P_0+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_i)+\bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_i)\right)P_{\mu}=d_{kn}^{(i)}\;P_n\,,\\
&\bar{\bar{f}}_{1}^{(k,n)}(r_a)\;P_0+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_a)+\bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_a)\right)P_{\mu}=d_{kn}^{(a)}\;P_n\,,
\end{aligned}\right.\tag{74}$$

$$\tau_{kn}^{(2)}=-\tau_{kn}^{(1)},\ \text{d. h.}\ \left\{\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{g}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_i)+\bar{\bar{g}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_i)\right)\frac{dP_{\mu}}{d\varphi}=e_{kn}^{(i)}\frac{dP_n}{d\varphi}\,,\\
&\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\bar{g}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_a)+\bar{\bar{g}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_a)\right)\frac{dP_{\mu}}{d\varphi}=e_{kn}^{(a)}\frac{dP_n}{d\varphi}\,,
\end{aligned}\right.\tag{75}$$

und hieraus kann man nach Vergleich der Koeffizienten der Funktionen P_μ bzw. deren Ableitungen zunächst aus (74)

1. für den Fall $n=0$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\bar{f}}_{1}^{(k,0)}(r_i)=d_{k0}^{(i)},\quad \bar{\bar{f}}_{1}^{(k,0)}(r_a)=d_{k0}^{(a)},\\
&\left.\begin{aligned}
\bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_i)+\bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_i)&=0\\
\bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_a)+\bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_a)&=0
\end{aligned}\right\}\ \text{für}\ \mu=1\ldots\infty
\end{aligned}\right\}\tag{76}$$

2. für denFall $n \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{f}}_1^{(k,n)}(r_i) = 0\,, \quad \bar{f}_{n-1}^{(k,n)}(r_i) + \bar{\bar{f}}_{n+1}^{(k,n)}(r_i) = d_{kn}^{(i)}\,, \\ &\bar{\bar{f}}_1^{(k,n)}(r_a) = 0\,, \quad \bar{f}_{n-1}^{(k,n)}(r_a) + \bar{\bar{f}}_{n+1}^{(k,n)}(r_a) = d_{kn}^{(a)}\,, \\ &\left.\begin{aligned} \bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_i) + \bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_i) = 0 \\ \bar{f}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_a) + \bar{\bar{f}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_a) = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } \mu \neq n\,, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

und aus (75)

$$\left.\begin{aligned} &\bar{g}_{n-1}^{(k,n)}(r_i) + \bar{\bar{g}}_{n+1}^{(k,n)}(r_i) = e_{kn}^{(i)}\,, \quad \bar{g}_{n-1}^{(k,n)}(r_a) + \bar{\bar{g}}_{n+1}^{(k,n)}(r_a) = e_{kn}^{(a)}\,, \\ &\left.\begin{aligned} \bar{g}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_i) + \bar{\bar{g}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_i) = 0 \\ \bar{g}_{\mu-1}^{(k,n)}(r_a) + \bar{\bar{g}}_{\mu+1}^{(k,n)}(r_a) = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } \mu \neq n \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

folgern. Aus (76) und (78) bzw. (77) und (78) sind mit (72) die Konstanten $p_{m\mu}^{(k,n)}$ ($m = 1 \ldots 4$, $\mu = 0 \ldots \infty$) eines jeden Teil-Zustandes (k,n), je nachdem man die Reihenentwicklungen (μ) abbricht, mit beliebiger Genauigkeit ermittelbar. Die *Love*sche Funktion $L_{kn}^{(2)}$ ist damit nach (71) bestimmt, und nach Überlagerung sämtlicher Teilzustände auch der resultierende Randspannungszustand *2*:

$$L^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} L_{kn}^{(2)}\,. \tag{79}$$

4. Der kugelsymmetrische Fall. a) Das Temperaturfeld. Die thermischen Randwirkungen $\varphi_i = \varphi_i(t)$ und $\varphi_a = \varphi_a(t)$ sind in diesem Falle von ψ bzw. $\xi = \cos\psi$ unabhängig, so daß man aus (43b) wegen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\xi)\, d\xi = 0 \qquad \text{für } n = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad \int_{-1}^{+1} P_0\, d\xi = 2$$

sofort

$$c_n^{(a)} = c_n^{(i)} = 0 \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, \qquad c_0^{(i)}(t) = \varphi_i(t), \quad c_0^{(a)}(t) = \varphi_a(t) \tag{80}$$

erhält. Somit wird nach (44) $T_{kn}(t) = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, wodurch in (45) die Reihenentwicklung hinsichtlich n fortfällt. Es bleiben allein die Glieder $(k,n=0)$ übrig, so daß man aus (45) schließlich mit $D_{k0} = D_k$, $\omega_{k0} = \omega_k$, $T_{k0} = T_k$ sowie mit $P_0 = 1$

$$\vartheta(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\, \Phi_0(\omega_k r)\, T_k(t) \tag{81}$$

gewinnt.

Hierbei sind die Eigenwerte $\omega_{k0} = \omega_k$ im Sinne von (32) durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta_0(\omega) = &\left[a_1 J_{\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{\frac{1}{2}}(\omega r_a) - J_{\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)\right] \\ &\times \left[b_1 J_{-\frac{1}{2}}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{-\frac{1}{2}}(\omega r_i) - J_{-\frac{1}{2}}(\omega r_i)\right)\right] \\ &- \left[a_1 J_{-\frac{1}{2}}(\omega r_a) + \frac{a_2}{2 r_a}\left(2\omega r_a J'_{-\frac{1}{2}}(\omega r_a) - J_{-\frac{1}{2}}(\omega r_a)\right)\right] \\ &\times \left[b_1 J_{\frac{1}{2}}(\omega r_i) + \frac{b_2}{2 r_i}\left(2\omega r_i J'_{\frac{1}{2}}(\omega r_i) - J_{\frac{1}{2}}(\omega_i r)\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

bzw. mit den Relationen[1]

$$J_{\frac{1}{2}}(\omega r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega r}}\sin\omega r\,, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(\omega r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega r}}\cos\omega r$$

[1] Siehe z. B.: *R. Rothe* und *I. Szabó*, Höhere Mathematik VI. Stuttgart 1953.

und damit

$$\Phi_0(\omega r) = \frac{2}{\pi r \sqrt{r_a}} \left\{ [a_1 r_a \cos \omega r_a - a_2 (\omega r_a \sin \omega r_a + \cos \omega r_a)] \frac{\sin \omega r}{\omega r} \right.$$
$$\left. - [a_1 r_a \sin \omega r_a + a_2 (\omega r_a \cos \omega r_a - \sin \omega r_a)] \frac{\cos \omega r}{\omega r} \right\} \tag{82}$$

durch

$$\operatorname{tg} \omega (r_a - r_i) = - \omega \frac{r_i r_a (a_2 b_1 - a_1 b_2) - a_2 b_2 (r_a - r_i)}{(a_1 b_1 + a_2 b_2 \omega^2) r_i r_a + a_2 b_2 - a_1 b_2 r_a - a_2 b_1 r_i} \tag{83}$$

festgelegt. Mit (38) erhält man aus (44)

$$D_{k0} = D_k = \frac{2 \omega_k^2}{a^2 \left[r^3 \left(\Phi_0^2 + \Phi_0'^2 + \frac{1}{\omega_k r} \Phi_0 \Phi_0' \right) \right]_{r_i}^{r_a}} \tag{84}$$

und auch die Zeitfunktion vereinfacht sich. Zunächst sind

$$\eta_0^{(i)}(r) = \alpha_0^{(i)} r^0 + \beta_0^{(i)} r^{-(0+1)} = \alpha_0^{(i)} + \frac{\beta_0^{(i)}}{r}, \quad \eta_0^{(a)}(r) = \alpha_0^{(a)} + \frac{\beta_0^{(a)}}{r}$$

bzw. mit (18)

$$\eta_0^{(i)}(r) = \frac{r_i^2 \left[a_2 + a_1 \left(\frac{r_a}{r} \right) (r_a - r) \right]}{a_1 b_1 r_a r_i (r_a - r_i) - a_1 b_2 r_a^2 + a_2 b_1 r_i^2}, \quad \eta_0^{(a)}(r) = - \frac{r_a^2 \left[b_2 - b_1 \left(\frac{r_i}{r} \right) (r - r_i) \right]}{a_1 b_1 r_a r_i (r_a - r_i) - a_1 b_2 r_a^2 + a_2 b_1 r_i^2},$$

und damit folgt aus (44) unter Beachtung von (80)

$$T_{k0}(t) = T_k(t)$$
$$= \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} \frac{\left[a_2 + a_1 \left(\frac{r_a}{r} \right) (r_a - r) \right] r_i^2 \varphi_i(\tau) - \left[b_2 - b_1 \left(\frac{r_i}{r} \right) (r - r_i) \right] r_a^2 \varphi_a(\tau)}{a_1 b_1 r_a r_i (r_a - r_i) - a_1 b_2 r_a^2 + a_2 b_1 r_i^2} r^2 \Phi_0(\omega_k r) \, e^{-\left(\frac{\omega_k}{a} \right)^2 (t - \tau)} \, dr \, d\tau . \tag{85}$$

b) Die Wärmespannungen. Da im kugelsymmetrischen Falle nur Radialverschiebungen v auftreten können, erhält man aus (48) mit $w = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial \psi} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial v}{\partial r} + 2\nu \frac{v}{r} \right] - \frac{E \alpha_t}{1-2\nu} \vartheta , \\ \sigma_\varphi = \sigma_\psi &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{v}{r} + \nu \frac{\partial v}{\partial r} \right] - \frac{E \alpha_t}{1-2\nu} \vartheta , \quad \tau = 0 , \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

wobei für die Radialverschiebungen v selbst aus der ersten Gleichung von (49) — die zweite ist im kugelsymmetrischen Falle von selbst erfüllt — die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) \right] = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \tag{87}$$

hervorgeht. Fortlaufende Integration liefert mit den willkürlichen Zeitfunktionen $C_1(t)$ und $C_2(t)$

$$v = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t}{r^2} \int r^2 \, \vartheta(r, t) \, dr + C_1(t) \frac{r}{3} + \frac{C_2(t)}{r^2} , \tag{88}$$

und man erhält schließlich damit nach (86) für die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{2 E \alpha_t}{1-\nu} \frac{1}{r^3} \int r^2 \, \vartheta \, dr + E \left[\frac{C_1}{3} \frac{1}{1-2\nu} - \frac{2 C_2}{r^3} \frac{1}{1+\nu} \right] , \\ \sigma_\varphi = \sigma_\psi &= - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \left[\vartheta - \frac{1}{r^3} \int r^2 \, \vartheta \, dr \right] + E \left[\frac{C_1}{3(1-2\nu)} + \frac{C_2}{r^3} \frac{1}{1+\nu} \right] . \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

Die Zeitfunktionen $C_1(t)$ und $C_2(t)$ werden aus den Randbedingungen $\sigma_r(r_i, t) = 0$ und $\sigma_r(r_a, t) = 0$, bestimmt, und man gewinnt letztlich nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(r,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{(1-\nu)(r_a^3-r_i^3)}\left\{\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^3-1\right]\int_{r_i}^{r} r^2\,\vartheta(r,t)\,dr-\left[1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^3\right]\int_{r}^{r_a} r^2\,\vartheta(r,t)\,dr\right\},\\ \sigma_\varphi = \sigma_\psi &= -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\left\{\vartheta-\frac{1}{r_a^3-r_i^3}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^3+2\right]\int_{r_i}^{r} r^2\,\vartheta\,dr+\left[\left(\frac{r_i}{r}\right)^3+2\right]\int_{r}^{r_a} r^2\,\vartheta\,dr\right)\right\}.\end{aligned}\right| \tag{90}$$

c) **Näherungsformeln für den kugelsymmetrischen Fall.** Entsprechend den Ausführungen des Verfassers im ersten Heft[1] des Ing.-Archivs 1956, S.1ff. kann man nun auch hier für den Fall nicht zu schneller Anheizvorgänge an dünnen Hohlkugeln Näherungsformeln für die Spannungen herleiten. Insbesondere erhält man aus (90), wenn $\vartheta_i(t)$ bzw. $\vartheta_a(t)$ die Innen- bzw. Außentemperatur der Hohlkugel, R_0 ihr mittlerer Radius und h ihre Wandstärke bedeuten mit $\Delta\vartheta(t) = \vartheta_i(t) - \vartheta_a(t)$ für die extremalen Radialspannungen

$$\min \sigma_r(t) = -\frac{E\alpha_t\,\Delta\vartheta(t)}{1-\nu}\,\frac{1}{6}\,\frac{h}{R_0} \tag{91}$$

und für die extremalen Ringspannungen

1) am Innenrand

$$\min \sigma_{\varphi i} = \min \sigma_{\psi i} = -\frac{E\alpha_t\,\Delta\vartheta_i(t)}{2(1-\nu)}\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{h}{R_0}\right), \tag{92}$$

2) am Außenrand

$$\max \sigma_{\varphi a} = \max \sigma_{\psi a} = \frac{E\alpha_t\,\Delta\vartheta_i(t)}{2(1-\nu)}\left(1-\frac{2}{3}\,\frac{h}{R_0}\right). \tag{93}$$

Aus (91), (92) und (93) ersieht man, daß die Radialspannungen im Vergleich zu den Ringspannungen klein sind. Bei Anheizung des Innenrandes z. B. treten die größten Spannungen in Form von Druckspannungen am inneren Kugelrande auf. Sie sind, da $\max \Delta\vartheta > \Delta\vartheta_s$ ($\Delta\vartheta_s$ = stationäre Endtemperaturdifferenz), stets größer als die entsprechenden Spannungswerte am Ende des Anheizvorganges. Über die Ermittlung von $\max \Delta\vartheta$ orientiere sich der Leser in dem bereits zitierten Aufsatz „Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern".

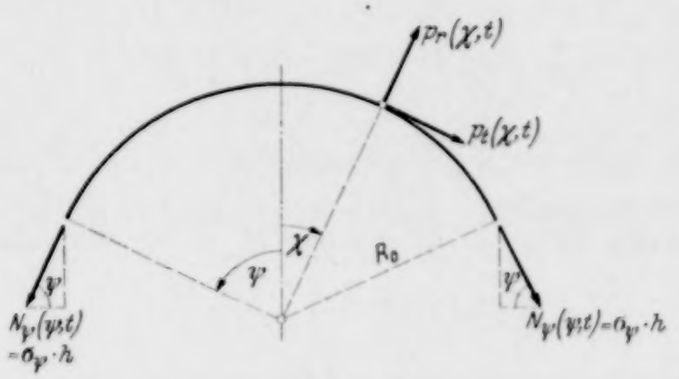

Abb. 4.

5. Achsensymmetrische Probleme an dünnwandigen Hohlkugeln. Um die durch (64) gegebenen Oberflächenspannungen zum Verschwinden zu bringen, genügt in diesem Falle ein zum Grundzustand *1* zu überlagernder Membranzustand *2*. Hierunter versteht man einen jeweils längs der Schalendicke h nicht veränderlichen Spannungszustand, dessen Schnittkräfte, worunter die Spannungsresultierenden je Schnittlängeneinheit verstanden werden, jeweils in die an die Schale gelegte Tangentialebene fallen. Bezeichnet man mit $p_r^{(2)}(\psi, t)$ bzw. $p_t^{(2)}(\psi, t)$ die auf die Schale

[1] *R. Trostel*, Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt.

wirkenden äußeren Radial- bzw. Schubkräfte je Flächeneinheit (Abb. 4), so erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Membranspannungen $\sigma_\varphi^{(2)}$ bzw. $\sigma_\psi^{(2)}$ schließlich

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varphi^{(2)}(\psi\ t) &= \frac{R_0}{h}\frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\chi=0}^{\psi}[p_r^{(2)}(\chi,t)\sin\chi\cos\chi - p_i^{(2)}(\chi,t)\sin^2\chi]\,d\chi\,,\\ \sigma_\psi^{(2)}(\psi,t) &= \frac{R_0}{h}\left[p_r^{(2)}(\psi,t) - \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\chi=0}^{\psi}[p_r^{(2)}(\chi,t)\sin\chi\cos\chi - p_i^{(2)}(\chi,t)\sin^2\chi\right]d\chi\,,\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

und indem man hierin gemäß (64)

$$\left.\begin{aligned}p_r^{(2)}(\psi,t) &= -[\sigma_r^{(1)}(r_a,\psi,t) - \sigma_r^{(1)}(r_i,\psi,t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(d_{kn}^{(a)} - d_{kn}^{(i)})\,P_n(\xi)\,T_{kn}(t)\,,\\ p_i^{(2)}(\psi,t) &= -[\tau^{(1)}(r_a,\psi,t) - \tau^{(1)}(r_i,\psi,t)] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(e_{kn}^{(a)} - e_{kn}^{(i)})\,\frac{dP_n}{d\psi}\,T_{kn}(t)\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

einsetzt, sind die Spannungen des Zusatzzustandes **2** gefunden. Hinsichtlich der Verteilung der Radial- bzw. Schubspannungen $\sigma_r^{(2)}$ und $\tau^{(2)}$ längs der Schalendicke wird man wohl mit genügender Genauigkeit jeweils ein lineares Gesetz in Ansatz bringen dürfen.

(Eingegangen am 28. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Rudolf Trostel*, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität, Hardenbergstr. 34, Lehrstuhl für Mechanik.

The Equations of Motion for Curved and Twisted Elastic Bars deduced by the use of the „Method of Internal Constraints"

By E. Volterra

1. Introduction. The object of the present paper is to show how the „Method of Internal Constraints", which was used in a previous paper[1] for deriving the equations of motion of curved elastic bars, can also be used for deriving the equations of motion for curved and twisted bars taking into account the effects of shear and of rotatory inertia.

The problem of vibrations of curved and twisted bars finds many important practical applications among which are the vibrations of helicoidal springs and the vibrations of turbine buckets.

The isotropic homogeneous elastic bar is supposed to be an elongated solid with a curvilinear baricentric axis. It is referred to a system of curvilinear right-handed coordinates $(0, X, Y, Z)$ in which the origin 0 coincides with a generic point on the central axis of the bar, X with the central axis (and has as positive direction the positive direction of the central axis), Y coincides with the principal normal and is directed positively towards the center of curvature, and Z coincides with the binormal at 0.

By assuming that during motion the sections of the bar originally normal to its axis remain plane, the following condition of constraint:

$$\bar{V}(x,\ y,\ z;\ t) = \bar{v}(x,t) + y\,\bar{\lambda}(x,t) + z\,\bar{\mu}(x,t) \tag{1}$$

must be satisfied.

In equation (1) $\bar{V}$ represents the elastic displacement vector at a generic point of the bar, while $\bar{v}, \bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$ are three vectors, a priori unknown, functions of the variables x and t. Calling $u^i, \lambda^i, \mu^i, v^i$ $(i = 1, 2, 3)$ respectively the controvariant components of the vectors $\bar{V}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ and $\bar{v}$ on the X, Y and Z axes, from equation (1) equations (2) follow

$$\left.\begin{aligned} u^1(x, y, z; t) &= v^1(x, t) + y\,\lambda^1(x, t) + z\,\mu^1(x, t)\,, \\ u^2(x, y, z; t) &= v^2(x, t) + y\,\lambda^2(x, t) + z\,\mu^2(x, t)\,, \\ u^3(x, y, z; t) &= v^3(x, t) + y\,\lambda^3(x, t) + z\,\mu^3(x, t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

The geometric significance of the internal constraints expressed by equations (1) and (2) has been explained in the previous paper. In the same paper, also, the square of the line element ds^2 has been derived in the more general case in which the central axis of the bar has both first and second curvatures, which will be denoted respectively by the letters c and τ. It has been supposed in deriving the expression of ds^2 that, in a first approximation, the second powers of the quantities (pure numbers) yc, zc, $y\tau$ and $z\tau$ can be neglected in comparison with unity. The equations of motion which shall be derived apply then to the general case in which curvature c and twist τ are given functions of the variable x, provided that

$$\frac{dR(x)}{dx} \qquad \text{and} \qquad \frac{dT(x)}{dx}$$

[$R(x)$ and $T(x)$ being respectively the radii of curvature and twist of the central axis of the bar] are finite quantities. In fact, in deriving the equations of motion through the variational principle in the given order of approximation the terms

$$\frac{dc(x)}{dx} = -\frac{1}{[R(x)]^2}\frac{dR(x)}{dx}\,,$$

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = -\frac{1}{[T(x)]^2}\frac{dT(x)}{dx}$$

can be neglected.

---

[1] See *E. Volterra*, Ing.-Arch., 23, (1955), p. 402.

From the fundamental (*Riemann*ian) metric tensor it is possible to derive the covariant and controvariant components of strain and then it is possible to derive the expressions for the Kinetic and Potential Energies of the bar in terms of the nine unknown controvariant components

$$\nu^1, \nu^2, \nu^3,; \quad \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3; \quad \mu^1, \mu^2, \mu^3$$

of the three vectors $\bar{\nu}, \bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$.

The application of *Hamiltons* Principle furnishes the nine differential equations of motion and the boundary conditions which univocally determine the nine unknown functions ν^1, ν^2, ν^3; $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$; μ^1, μ^2, μ^3 in the case of free vibrations.

In deriving these equations of motion it will be assumed, for the sake of simplicity, that the axes Y and Z coincide with the principal axes of inertia of the cross-section of the bar and that the inertia characteristics of the cross-section of the bar are constant, although the method of analysis presented in the paper may be applied also to the general case in which the inertia characteristics of the cross-section of the bar are known functions of the variable x.

From these general equations of motion the equations of motion for the particular cases of twisted bars ($c = 0$), of curved bars ($\tau = 0$), of straight bars ($c = \tau = 0$) are immediately derived.

2. Expression of ds^2; covariant and controvariant components of strain. The expression of the square of the line element ds^2 in the orthogonal curvilinear system $O\,X\,Y\,Z$ is [1]

$$ds^2 = dx^2\,(1 - 2\,yc) + dy^2 + dz^2 - 2\,y\tau\,dx\,dz + 2\,z\tau\,dx\,dy\,. \tag{3}$$

The fundamental tensor will in this case be espressed by the metrics [2]:

$$\left|\begin{array}{lll} a_{11} = 1 - 2\,yc & a_{12} = 2\,z\tau & a_{13} = -2\,y\tau \\ a_{21} = 2\,z\tau & a_{22} = 1 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -2\,y\tau & a_{32} = 0 & a_{33} = 1 \end{array}\right|\,. \tag{4}$$

From which it follows with the same degree of approximation that

$$a = 1 - 2\,yc\,, \quad \sqrt{a} = 1 - yc\,, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 + yc\,, \tag{5}$$

$$\left|\begin{array}{lll} a^{11} = 1 + 2\,yc & a^{12} = -2\,z\tau & a^{13} = 2\,y\tau \\ a^{21} = -2\,z\tau & a^{22} = 1 & a^{23} = 0 \\ a^{31} = 2\,y\tau & a^{32} = 0 & a^{33} = 1 \end{array}\right|\,. \tag{6}$$

The covariant components of strain are expressed by [3]

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\,(u_{i/k} + u_{k/i}) \tag{7}$$

where, due to the definition of covariant differentiation of tensors [4]

$$u_{i/k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_1^3 \left\{\begin{matrix} i & k \\ j \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

$\left\{\begin{matrix} i & k \\ j \end{matrix}\right\}$ representing *Christoffel's* symbols of the second kind. It follows that

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{1\,j}^{3}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j}\,u^j + a_{ij}\,\frac{\partial u^j}{\partial x^k} + a_{jk}\,\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) \tag{9}$$

and that

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11} &= -c\,(\lambda^2\,y + \mu^2\,z + \nu^2) + (1 - 2\,yc)\left(y\,\frac{\partial\lambda^1}{dx} + z\,\frac{\partial\mu^1}{dx} + \frac{\partial\nu^1}{\partial x}\right) \\ &\quad + 2\,z\tau\left(y\,\frac{\partial\lambda^2}{\partial x} + z\,\frac{\partial\mu^2}{\partial x} + \frac{\partial\nu^2}{\partial x}\right) - 2\,y\tau\left(y\,\frac{\partial\lambda^3}{\partial x} + z\,\frac{\partial\mu^3}{\partial x} + \frac{\partial\nu^3}{\partial x}\right), \\ \gamma_{22} &= 2\,z\tau\,\lambda^1 + \lambda^2\,, \\ \gamma_{33} &= -2\,y\tau\,\mu^1 + \mu^3\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

---

[1] See *E. Volterra*, L. c.

[2] The notation used in the text is the same as the one used by *T. Levi-Civita* in his book: The Absolute Differential Calculus, London 1926.

[3] See *E. Volterra*, Rendiconti Accademia dei Lincei, 20 (1934) p. 424, 463; 21 (1935) p. 14.

[4] *T. Levi-Civita*, L. c.

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \tau(\lambda^3 y + \mu^3 z + \nu^3) + \frac{1}{2}(1 - 2yc)\lambda^1 + z\tau\lambda^2 - y\tau\lambda^3 \\
&\quad + z\tau\left(y\frac{\partial\lambda^1}{\partial x} + z\frac{\partial\mu^1}{\partial x} + \frac{\partial\nu^1}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial\lambda^2}{\partial x} + z\frac{\partial\mu^2}{\partial x} + \frac{\partial\nu^2}{\partial x}\right), \\
\gamma_{13} &= -\tau(\lambda^2 y + \mu^2 z + \nu^2) + \frac{1}{2}(1 - 2yc)\mu^1 + z\tau\mu^2 - y\tau\mu^3 \\
&\quad - y\tau\left(y\frac{\partial\lambda^1}{\partial x} + z\frac{\partial\mu^1}{\partial x} + \frac{\partial\nu^1}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial\lambda^3}{\partial x} + z\frac{\partial\mu^3}{\partial x} + \frac{\partial\nu^3}{\partial x}\right), \\
\gamma_{23} &= z\tau\mu^1 + \frac{1}{2}\mu^2 - y\tau\lambda^1 + \frac{1}{2}\lambda^3 .
\end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

The controvariant components of strain can be derived either from the formula

$$\gamma^{ik} = \frac{1}{2}(u^{i/k} + u^{k/i}), \qquad (11)$$

or from the formula

$$\gamma^{ik} = \sum_{jh} a^{ij}\, a^{kh}\, \gamma_{jh} \qquad (j, h = 1, 2, 3). \qquad (12)$$

3. Expressions of the Kinetic and Potential Energies. The Kinetic Energy per unit volume of the bar will be expressed by

$$T_0 = \frac{\varrho}{2}\sum a_{rs}\frac{\partial u^r}{\partial t}\frac{\partial u^s}{\partial t} \qquad (s, r = 1, 2, 3)$$

ϱ being the density of the material of the bar, or by

$$T_0 = \frac{\varrho}{2}\left[(1 - 2yc)\left(\frac{\partial u^1}{\partial t}\right)^2 + 4z\tau\frac{\partial u^1}{\partial t}\frac{\partial u^2}{\partial t} - 4y\tau\frac{\partial u^1}{\partial t}\frac{\partial u^3}{\partial t} + \left(\frac{\partial u^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t}\right)^2\right]. \qquad (13)$$

The Total Kinetic Energy of the bar will be expressed by

$$T = \int_V \sqrt{a}\; T_0\, dx\, dy\, dz \qquad (14)$$

V being the volume of the bar.

By substituting into equations (13) and (14) for u^1, u^2 and u^3 the expressions given by equations (2), by performing the integrations with respect to the variables y and z, calling

$$I_z = \int_A y^2\, dy\, dz, \qquad I_y = \int_A z^2\, dy\, dz$$

the principal moments of inertia of the cross-section of the bar and A the area of the cross-section of the bar, one obtains the following expression for T:

$$\left.\begin{aligned}
T = \frac{\varrho}{2}\int_l \Bigg[& I_z\left(\frac{\partial\lambda^1}{\partial t}\right)^2 + I_y\left(\frac{\partial\mu^1}{\partial t}\right)^2 + A\left(\frac{\partial\nu^1}{\partial t}\right)^2 - 6 I_z c\frac{\partial\lambda^1}{\partial t}\frac{\partial\nu^1}{\partial t} + 4 I_y\tau\frac{\partial\mu^1}{\partial t}\frac{\partial\nu^2}{\partial t} \\
& + 4 I_y\tau\frac{\partial\mu^2}{\partial t}\frac{\partial\nu^1}{\partial t} - 4 I_z\tau\frac{\partial\lambda^1}{\partial t}\frac{\partial\nu^3}{\partial t} - 4 I_z\tau\frac{\partial\lambda^3}{\partial t}\frac{\partial\nu^1}{\partial t} + I_z\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial t}\right)^2 \\
& + I_y\left(\frac{\partial\mu^2}{\partial t}\right)^2 + A\left(\frac{\partial\nu^2}{\partial t}\right)^2 - 2 I_z c\frac{\partial\lambda^2}{\partial t}\frac{\partial\nu^2}{\partial t} + I_z\left(\frac{\partial\lambda^3}{\partial t}\right)^2 + I_y\left(\frac{\partial\mu^3}{\partial t}\right)^2 \\
& + A\left(\frac{\partial\nu^3}{\partial t}\right)^2 - 2 I_z c\frac{\partial\lambda^3}{\partial t}\frac{\partial\nu^3}{\partial t}\Bigg] dx
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

l being the length of the bar. The Strain Energy per unit volume of the bar will be expressed by

$$U_0 = \frac{\lambda}{2}\Theta^2 + G\psi \qquad (16)$$

where Θ, divergence of the elastic displacement vector $\bar{V}$, is given by [1]

$$\Theta = \sum_1^3{}_i\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x^i}u^i\right) \qquad (x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z) \qquad (17)$$

while ψ, tensor of deformation, is expressed as a function of the covariant components of strain by

$$\psi = \sum_{ik}\sum_{jh} a^{ij}\, a^{hk}\, \gamma_{ih}\, \gamma_{ik}\ ; \qquad (18)$$

[1] *T. Levi-Civita*, L. c.

λ is *Lamé*'s constant and G the modulus of rigidity of the material of the bar related to *Young*'s modulus E and to *Poisson*'s ratio σ by the relationships

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

The Total Potential Energy of the bar will be espressed by

$$U = -\int_V \sqrt{a}\left(\frac{\lambda}{2}\Theta^2 + G\psi\right) dx\, dy\, dz\,. \tag{19}$$

By substituting into equation (19) the expressions given by equations (17), (18), (2), (5), (6) and (10), by performing the integrations over the cross-section of the bar, one obtains the following expression for U:

$$\begin{aligned}
U = -\int_l \Bigg[& \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) I_z \left(\frac{\partial \lambda^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) I_y \left(\frac{\partial \mu^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A \left(\frac{\partial \nu^1}{\partial x}\right)^2 \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A(\lambda^2)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A(\mu^3)^2 + \lambda A \lambda^2 \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + \lambda A \mu^3 \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + \lambda A \lambda^2 \mu^3 \\
& + \frac{G}{2} A(\lambda^1)^2 + \frac{G}{2} I_z \left(\frac{\partial \lambda^2}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} I_y \left(\frac{\partial \mu^2}{\partial x}\right) + \frac{G}{2} A \left(\frac{\partial \nu^2}{\partial x}\right)^2 \\
& + G A \lambda^1 \frac{\partial \nu^2}{\partial x} + \frac{G}{2} A(\mu^1)^2 + \frac{G}{2} I_z \left(\frac{\partial \lambda^3}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} I_y \left(\frac{\partial \mu^3}{\partial x}\right)^2 \\
& + \frac{G}{2} A \left(\frac{\partial \nu^3}{\partial x}\right)^2 + G A \mu^1 \frac{\partial \nu^3}{\partial x} + \frac{G}{2} A(\mu^2)^2 + \frac{G}{2} A(\lambda^3)^2 \\
& + G A \mu^2 \lambda^3 - 2(\lambda + G) c I_z \lambda^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} - (\lambda + 2G) c I_y \mu^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial x} \\
& - (\lambda + 2G) c A \nu^2 \frac{\partial \nu^1}{\partial x} - \lambda c A \lambda^2 \nu^2 - \lambda c A \mu^3 \nu^2 - (\lambda + 2G) c I_z \frac{\partial \lambda^1}{\partial x}\frac{\partial \nu^1}{\partial x} \\
& - \lambda c I_z \mu^3 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} - G c I_z \lambda^1 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + G c I_z \frac{\partial \lambda^2}{\partial x}\frac{\partial \nu^2}{\partial x} - G c I_z \mu^1 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} \\
& + G c I_z \frac{\partial \lambda^3}{\partial x}\frac{\partial \nu^3}{\partial x} + 2 G \tau A \lambda^1 \nu^3 - 2 G \tau A \mu^1 \nu^2 - 2 G \tau I_y \lambda^1 \frac{\partial \mu^1}{\partial x} \\
& + 2 G \tau I_z \lambda^3 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + 2 G \tau I_y \mu^3 \frac{\partial \mu^2}{\partial x} + 2 G \tau A \nu^3 \frac{\partial \nu^2}{\partial x} \\
& - 2 G \tau I_y \lambda^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial x} + 2 G \tau I_y \frac{\partial \mu^1}{\partial x}\frac{\partial \nu^2}{\partial x} + 2 G \tau I_y \frac{\partial \nu^1}{\partial x}\frac{\partial \mu^2}{\partial x} \\
& + 2 G \tau I_z \mu^1 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} - 2 G \tau I_z \lambda^2 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} - 2 G \tau I_y \mu^2 \frac{\partial \mu^3}{\partial x} \\
& - 2 G \tau A \nu^2 \frac{\partial \nu^3}{\partial x} + 2 G \tau I_z \mu^3 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} - 2 G \tau I_z \frac{\partial \lambda^1}{\partial x}\frac{\partial \nu^3}{\partial x} \\
& - 2 G \tau I_z \frac{\partial \nu^1}{\partial x}\frac{\partial \lambda^3}{\partial x} + 2 G \tau I_z \mu^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} - 2 G \tau I_y \lambda^3 \frac{\partial \mu^3}{\partial x} \Bigg] dx\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

4. The Equations of Motion for Curved and Twisted Bars. On the assumption that no external forces (body or surface forces) are applied to the bar, by applying *Hamilton*'s Principle under the form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + T)\, dt = 0$$

to the whole bar, supposing the displacements to be zero at t_1 and t_2, one obtains the following nine equations of motion in the nine unknown functions:

$$\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3; \quad \mu^1, \mu^2, \mu^3; \quad \nu^1, \nu^2, \nu^3$$

of the variables x and t:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2G)\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial x^2} - 2G\tau\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial x^2} \\
&\quad - (2\lambda + G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} - G \frac{\partial \nu^2}{\partial x} + 2G\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \mu^1}{\partial x} - \lambda\, c\, r_z^2 \frac{\partial \mu^3}{\partial x} \\
&\quad - G\lambda^1 - 2G\tau\,\nu^3 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial t^2} - 3\varrho\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial t^2} - 2\varrho\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial t^2}\,, \\
&G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial x^2} + G\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial x^2} + (2\lambda + G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} + 4G\tau\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} \\
&\quad + 2G\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \mu^2}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \nu^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\lambda^2 - \lambda\mu^3 + \lambda\, c\,\nu^2 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial t^2} \\
&\quad - \varrho\, r_z^2\, c \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial t^2}\,, \\
&G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial x^2} + G\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial x^2} - 2G\tau\, r_z^2 \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial x^2} - 4G\tau\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} \\
&\quad + 2G\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \mu^3}{\partial x} - G\, c\, r_z^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial x} - G\mu^2 - G\lambda^3 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial t^2} \\
&\quad - \varrho\, r_z^2\, c \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial t^2} - 2\varrho\, r_z^2\, \tau \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial t^2}\,, \\
&(\lambda + 2G)\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial x^2} + 2G\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\, c\, r_y^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial x} - 2\,G\,\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} \\
&\quad + G\, c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} - G \frac{\partial \nu^3}{\partial x} + 2G\tau\,\nu^2 - G\mu^1 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial t^2} + 2\varrho\, r_y^2\, \tau \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial t^2}\,, \\
&G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial x^2} + 2G\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial x^2} - 2G\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + 4G\tau\, r_y^2 \frac{\partial \mu^3}{\partial x} \\
&\quad + (\lambda + 2G)\, c\, r_y^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial x} - G\mu^2 - G\lambda^3 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial t^2} + 2\varrho\, r_y^2\, \tau \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial t^2}\,, \\
&G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^3}{\partial x^2} - 2G\tau\,(r_y^2 + r_z^2) \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} - 4G\tau\, r_y^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial x} + \lambda\, c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} \\
&\quad - \lambda \frac{\partial \nu^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\,\mu^3 - \lambda\,\lambda^2 + \lambda\, c\,\nu^2 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^3}{\partial t^2}\,, \\
&(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial x^2} + 2G\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial x^2} - 2G\tau\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial x^2} \\
&\quad + \lambda \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu^3}{\partial x} - (\lambda + 2G)\, c \frac{\partial \nu^2}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial t^2} - 3\varrho\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial t^2} \\
&\quad + 2\varrho\,\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial t^2} - 2\varrho\,\tau\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial t^2}\,, \\
&G \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial x^2} + G\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial x^2} + 2G\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial x^2} + 4G\tau \frac{\partial \nu^3}{\partial x} + G \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} \\
&\quad + (\lambda + 2G)\, c \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + \lambda\, c\,\lambda^2 + \lambda\, c\,\mu^3 + 2G\tau\,\mu^1 = \varrho \frac{\partial^2 \nu^2}{\partial t^2} - \varrho\, r_z^2\, c \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial t^2} \\
&\quad + 2\varrho\,\tau\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial t^2}\,, \\
&G \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial x^2} + G\, c\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial x^2} - 2G\tau\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial x^2} - 4G\tau \frac{\partial \nu^2}{\partial x} + G \frac{\partial \mu^1}{\partial x} \\
&\quad - 2G\tau\,\lambda^1 = \varrho \frac{\partial^2 \nu^3}{\partial t^2} - \varrho\, r_z^2\, c \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial t^2} - 2\varrho\, r_z^2\, \tau \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = l$:

$$
\begin{aligned}
&\left[-(\lambda + 2G) \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} + (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + 2G\tau\, r_z^2 \frac{\partial \nu^3}{\partial x}\right. \\
&\quad \left. + 2(\lambda + G)\, c\, r_z^2\, \lambda^2 - 2G\tau\, r_z^2\, \mu^1 + \lambda\, c\, r_z^2\, \mu^3\right] \delta\lambda^1 = 0\,, \\
&\left[\frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + c \frac{\partial \nu^2}{\partial x} + 2\tau\,\mu^2 + 2\tau\,\lambda^3 - c\,\lambda^1\right] \delta\lambda^2 = 0\,, \\
&\left[\frac{\partial \lambda^3}{\partial x} + c \frac{\partial \nu^3}{\partial x} - 2\tau \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + 2\tau\,\mu^3 - 2\tau\,\lambda^2 - c\,\mu^1\right] \delta\lambda^3 = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial\mu^1}{\partial x}+2G\tau\frac{\partial\nu^2}{\partial x}-(\lambda+2G)c\mu^2-2G\tau\lambda^1\right]\delta\mu^1=0,\\
&\left[\frac{\partial\mu^2}{\partial x}+2\tau\frac{\partial\nu^1}{\partial x}+2\tau\mu^3-2\tau\lambda^2\right]\delta\mu^2=0,\\
&\left[\frac{\partial\mu^3}{\partial x}-2\tau\mu^2-2\tau\lambda^3\right]\delta\mu^3=0,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial\nu^1}{\partial x}-(\lambda+2G)cr_z^2\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+2G\tau r_y^2\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-2G\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}\right.\\
&\quad\left.-(\lambda+2G)c\nu^2+\lambda\lambda^2+\lambda\mu^3\right]\delta\nu^1=0,\\
&\left[\frac{\partial\nu^2}{\partial x}+cr_z^2\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}+2\tau r_y^2\frac{\partial\mu^1}{\partial x}+\lambda^1+2\tau\nu^3\right]\delta\nu^2=0,\\
&\left[\frac{\partial\nu^3}{\partial x}+cr_z^2\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}+2\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+\mu^1-2\tau\nu^2\right]\delta\nu^3=0.
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

In these equations, together with the nine unknown functions

$$\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3;\quad \mu^1,\mu^2,\mu^3;\quad \nu^1,\nu^2 \text{ and } \nu^3,$$

of the variables x and t, appear the radii of inertia r_y and r_z of the cross-section of the bar which have been supposed to be constant, and the first and second curvatures c and τ of the central axis of the bar which have been supposed known functions of the variable x.

5. The Equations of Motion for Twisted Bars. In the case of twisted bars $c=0$, and the above equations (21) and (22) become

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial x^2}-2G\tau r_z^2\frac{\partial^2\nu^3}{\partial x^2}-G\frac{\partial\nu^2}{\partial x}+2G\tau(r_y^2+r_z^2)\frac{\partial\mu^1}{\partial x}-G\lambda^1-2G\tau\nu^3=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2G)r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial x^2}+2G\tau r_y^2\frac{\partial^2\nu^2}{\partial x^2}-2G\tau(r_y^2+r_z^2)\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}-G\frac{\partial\nu^3}{\partial x}+2G\tau\nu^2-G\mu^1\\
&\qquad=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial t^2}+2\varrho r_y^2\tau\frac{\partial^2\nu^2}{\partial t^2},\\
&G\frac{\partial^2\nu^2}{\partial x^2}+2G\tau r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial x^2}+4G\tau\frac{\partial\nu^3}{\partial x}+G\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+2G\tau\mu^1=\varrho\frac{\partial^2\nu^2}{\partial t^2}+2\varrho\tau r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial t^2},\\
&G\frac{\partial^2\nu^3}{\partial x^2}-2G\tau r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial x^2}-4G\tau\frac{\partial\nu^2}{\partial x}+G\frac{\partial\mu^1}{\partial x}-2G\tau\lambda^1=\varrho\frac{\partial^2\nu^3}{\partial t^2}-2\varrho r_z^2\tau\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

and

$$\left.\begin{aligned}
&Gr_z^2\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial x^2}+4G\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}+2G\tau(r_y^2+r_z^2)\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\nu^3}{\partial x}-(\lambda+2G)\lambda^2-\lambda\mu^3=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial t^2},\\
&Gr_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial x^2}-2G\tau r_z^2\frac{\partial^2\nu^1}{\partial x^2}-4G\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}+2G\tau(r_y^2+r_z^2)\frac{\partial\mu^3}{\partial x}\\
&\quad-G\mu^2-G\lambda^3=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial t^2}-2\varrho r_z^2\tau\frac{\partial^2\nu^1}{\partial t^2},\\
&Gr_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial x^2}+2G\tau r_y^2\frac{\partial^2\nu^1}{\partial x^2}-2G\tau(r_y^2+r_z^2)\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}\\
&\quad+4G\tau r_y^2\frac{\partial\mu^3}{\partial x}-G\mu^2-G\lambda^3=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial t^2}+2\varrho r_y^2\tau\frac{\partial^2\nu^1}{\partial t^2},\\
&Gr_y^2\frac{\partial^2\mu^3}{\partial x^2}-2G\tau(r_y^2+r_z)\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}-4G\tau r_y^2\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\nu^1}{\partial x}-(\lambda+2G)\mu^3-\lambda\lambda^2=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^3}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial^2\nu^1}{\partial x^2}+2G\tau r_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial x^2}-2G\tau r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu^3}{\partial x}\\
&\quad=\varrho\frac{\partial^2\nu^1}{\partial t^2}+2\varrho\tau r_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial t^2}-2\varrho\tau r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$ $x = l$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[-(\lambda+2G)\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+2G\tau r_z^2\frac{\partial\nu^3}{\partial x}-2G\tau r_z^2\mu^1\right]\delta\lambda^1=0\,,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial\mu^1}{\partial x}+2G\tau\frac{\partial\nu^2}{\partial x}-2G\tau\lambda^1\right]\delta\mu^1=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\nu^2}{\partial x}+2\tau r_y^2\frac{\partial\mu^1}{\partial x}+\lambda^1+2\tau\nu^3\right]\delta\nu^2=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\nu^3}{\partial x}+2\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+\mu^1-2\tau\nu^2\right]\delta\nu^3=0
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

and

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}+2\tau\mu^2+2\tau\lambda^3\right]\delta\lambda^2=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}-2\tau\frac{\partial\nu^1}{\partial x}+2\tau\mu^3-2\tau\lambda^2\right]\delta\lambda^3=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\mu^2}{\partial x}+2\tau\frac{\partial\nu^1}{\partial x}+2\tau\mu^3-2\tau\lambda^2\right]\delta\mu^2=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\mu^3}{\partial x}-2\tau\mu^2-2\tau\lambda^3\right]\delta\mu^3=0\,,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial\nu^1}{\partial x}+2G\tau r_y^2\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-2G\tau r_z^2\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}+\lambda\lambda^2+\lambda\mu^3\right]\delta\nu^1=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

As equations (23), (24), (25) and (26) show, during vibrations of a twisted bar the functions λ^1, μ^1, ν^2 and ν^3; λ^2, λ^3, μ^2, μ^3 and ν^1 are coupled.

6. The Equations of Motion for Curved Bars. In the case of curved bars $\tau = 0$ and the above equations (21) and (22) become

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial x^2}-(\lambda+2G)c r_z^2\frac{\partial^2\nu^1}{\partial x^2}-(2\lambda+G)c r_z^2\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}\\
&\quad-G\frac{\partial\nu^2}{\partial x}-\lambda c r_z^2\frac{\partial\mu^3}{\partial x}-G\lambda^1=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial t^2}-3\varrho c r_z^2\frac{\partial^2\nu^1}{\partial t^2}-2\varrho c r_z^2\frac{\partial^2\nu^3}{\partial t^2}\,,\\
&G r_z^2\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial x^2}+G c r_z^2\frac{\partial^2\nu^2}{\partial x^2}+(2\lambda+G)c r_z^2\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\nu^1}{\partial x}\\
&\quad-(\lambda+2G)\lambda^2-\lambda\mu^3+\lambda c\nu^2=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial t^2}-\varrho r_z^2 c\frac{\partial^2\nu^2}{\partial t^2}\,,\\
&G r_y^2\frac{\partial^2\mu^3}{\partial x^2}+\lambda c r_z^2\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\nu^1}{\partial x}-(\lambda+2G)\mu^3-\lambda\lambda^2+\lambda c\nu^2=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^3}{\partial t^2}\,,\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial^2\nu^1}{\partial x^2}-(\lambda+2G)c r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial\lambda^2}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu^3}{\partial x}\\
&\quad-(\lambda+2G)c\frac{\partial\nu^2}{\partial x}=\varrho\frac{\partial^2\nu^1}{\partial t^2}-3\varrho c r_z^2\frac{\partial^2\lambda^1}{\partial t^2}\,,\\
&G\frac{\partial^2\nu^2}{\partial x^2}+G c r_z^2\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial x^2}+G\frac{\partial\lambda^1}{\partial x}+(\lambda+2G)c\frac{\partial\nu^1}{\partial x}+\lambda c\lambda^2\\
&\quad+\lambda c\mu^3=\varrho\frac{\partial^2\nu^2}{\partial t^2}-\varrho r_z^2 c\frac{\partial^2\lambda^2}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

and

$$\left.\begin{aligned}
&G r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial x^2}+G c r_z^2\frac{\partial^2\nu^2}{\partial x^2}-G c r_z^2\frac{\partial\mu^1}{\partial x}-G\mu^2-G\lambda^3=\varrho r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial t^2}-\varrho r_z^2 c\frac{\partial^2\nu^3}{\partial t^2}\,,\\
&(\lambda+2G)r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial x^2}-(\lambda+2G)c r_y^2\frac{\partial\mu^2}{\partial x}+G c r_z^2\frac{\partial\lambda^3}{\partial x}-G\frac{\partial\nu^3}{\partial x}-G\mu^1=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^1}{\partial t^2}\,,\\
&G r_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial x^2}+(\lambda+2G)c r_y^2\frac{\partial\mu^1}{\partial x}-G\mu^2-G\lambda^3=\varrho r_y^2\frac{\partial^2\mu^2}{\partial t^2}\,,\\
&G\frac{\partial^2\nu^3}{\partial x^2}+G c r_z^2\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial x^2}+G\frac{\partial\mu^1}{\partial x}=\varrho\frac{\partial^2\nu^3}{\partial t^2}-\varrho r_z^2 c\frac{\partial^2\lambda^3}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

with the following boundary conditions at $x = 0,\ x = l$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[-(\lambda + 2G)\frac{\partial \lambda^1}{\partial x} + (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial v^1}{\partial x} + \lambda\, c\, r_z^2 \mu^3 + 2(\lambda + G)\, c\, r_z^2 \lambda^2\right] \delta\lambda^1 , \\
&\left[\frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + c\frac{\partial v^2}{\partial x} - c\,\lambda^1\right] \delta\lambda^2 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial \mu^3}{\partial x}\right] \delta\mu^3 = 0 , \\
&\left[(\lambda + 2G)\frac{\partial v^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\, c\, r^2 + \lambda\lambda^2 + \lambda\mu^3\right] \delta v^1 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial v^2}{\partial x} + c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + \lambda^1\right] \delta v^2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

and:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \lambda^3}{\partial x} + c\frac{\partial v^3}{\partial x} - c\,\mu^1\right] \delta\lambda^3 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial \mu^1}{\partial x} - c\,\mu^2\right] \delta\mu^1 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial \mu^2}{\partial x}\right] \delta\mu^2 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial v^3}{\partial x} + c\, r_z^2 \frac{\partial \lambda^3}{\partial x} + \mu^1\right] \delta v^3 = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

As equations (27), (28), (29) and (30) show, during vibrations of a curved bar the functions $\lambda^1, \lambda^2, \mu^3, v^1$ and v^2; λ^3, μ^1, μ^2 and v^3 are coupled.

7. The Equations of Motion for Straight Bars. In the case of straight bars $c = 0$, $\tau = 0$ and the above equations (21) and (22) become

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda + 2G)\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial x^2} - G\frac{\partial v^2}{\partial x} - G\,\lambda^1 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial t^2} , \\
&G\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + G\frac{\partial \lambda^1}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v^2}{\partial t^2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
&G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial v^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\,\lambda^2 - \lambda\,\mu^3 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial t^2} , \\
&G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^3}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial v^1}{\partial x} - (\lambda + 2G)\,\mu^3 - \lambda\lambda^2 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^3}{\partial t^2} , \\
&(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 v^1}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial \lambda^2}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \mu^3}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v^1}{\partial t^2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial x^2} - G\,\mu^2 - G\,\lambda^3 = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda^3}{\partial t^2} , \\
&G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial x^2} - G\,\mu^2 - G\,\lambda^3 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial t^2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda + 2G)\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial x^2} - G\frac{\partial v^3}{\partial x} - G\,\mu^1 = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu^1}{\partial t^2} , \\
&G\frac{\partial^2 v^3}{\partial x^2} + G\frac{\partial \mu^1}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v^3}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

with the following boundary conditions at $x = 0,\ x = l$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \lambda^1}{\partial x}\right] \delta\lambda^1 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial v^2}{\partial x} + \lambda^1\right] \delta v^2 = 0 ,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \lambda^2}{\partial x}\right] \delta\lambda^2 = 0 , \\
&\left[\frac{\partial \mu^3}{\partial x}\right] \delta\mu^3 = 0 , \\
&\left[(\lambda + 2G)\frac{\partial v^1}{\partial x} + \lambda\lambda^2 + \lambda\mu^3\right] \delta v^1 = 0 ,
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial \lambda^3}{\partial x}\right]\delta\lambda^3 &= 0\,,\\ \left[\frac{\partial \mu^2}{\partial x}\right]\delta\mu^2 &= 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial \mu^1}{\partial x}\right]\delta\mu^1 &= 0\,,\\ \left[\frac{\partial \nu^3}{\partial x}\right]+\mu^1\Big]\delta\nu^3 &= 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

As equations (31), (32), (33), (34), (35), (36), (37) and (38) show, during vibrations of a straight bar the functions: λ^1 and ν^2; λ^2, μ^3 and ν^1; λ^3 and μ^2; μ^1 and ν^3 are coupled.

These equations are identical with the equations which were derived in the previous paper [1]. In fact, in this particular case the controvariant components $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$; μ^1, μ^2, μ^3; ν^1, ν^2 and ν^3 coincide with the cartesian components $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$; μ_x, μ_y, μ_z; ν_x, ν_y, ν_z of the elastic displacement vector $\bar{V}$. Equations (31) and (35) define the flexural eigenvibrations in the XY plane of the bar, equations (32) and (36) the longitudinal eigenvibrations along the axis of the bar, equations (33) and (37) the torsional eigenvibrations, and finally equations (34) and (38) the flexural eigenvibrations in the XZ plane of the bar.[2]

(Eingegangen am 15. März 1956)

Anschrift des Verfassers: Prof. *E. Volterra*, Troy N. Y. (USA) 1567 Tibbits Ave.

[1] *E. Volterra*, L. c.

[2] The material in the paper is based on an investigation, conducted at Rensselaer Polytechnic Institute Troy, New York, under the sponsorship of the Office of Ordnance Research, Contract No.-30-115-ORD 709, Project No. 454.13.

Über das *Grammel*sche Verfahren bei Eigenschwingungsaufgaben

Von K. Zoller

1. Einleitung. Für Eigenwertaufgaben, wie sie bei der Ermittlung der Eigenfrequenz von Schwingern mit kontinuierlich verteilter Masse vorliegen, verfügt man über eine gut ausgebaute mathematische Theorie[1], die sich vorwiegend auf die Differentialgleichung des Problems stützt und die u. a. auch zu den Näherungsverfahren führt, die über das *Hamilton*sche Prinzip und den daraus herzuleitenden *Rayleigh*schen Quotienten etwa in den *Galerkin*schen Gleichungen bzw. über die quellenmäßige Darstellung in den *Grammel*schen Gleichungen gegeben sind. Vom Standpunkte der Mechanik aus befriedigt dieses Vorgehen aber, wie schon eingehend untersucht und begründet worden ist[2], nicht voll, da diese Theorie, wenigstens in ihrem gegenwärtigen Stand, schon einfache technische Schwingeranordnungen nicht umfaßt, während die Mechanik immer noch ein wesentlich allgemeineres Variationsprinzip, das *Hamilton*sche Prinzip anwenden kann. Auch beim *Grammel*schen Verfahren läßt sich fragen, wieweit es nur ein besonderes mathematisches Verfahren zur Lösung bestimmter Eigenwertprobleme ist, und wieweit es sich darüber hinaus auf ein allgemeines Grundgesetz der Mechanik gründet. Diese Frage beantwortet sich nicht von selbst, weder aus der Herleitung dieses Näherungsverfahrens über eine quellenmäßige Darstellung[3], noch aus seinem Zusammenhang mit den *Schwarz*schen Quotienten[4]. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß man die beim *Grammel*schen Verfahren vorkommenden Ausdrücke bei bestimmten Problemen nicht etwa mechanisch deuten könne.

Bei Schwingungsaufgaben ist es nun möglich, das mechanische Grundgesetz, das auch hinter dem *Grammel*schen Verfahren steht, aufzuzeigen. Es ist dies wieder das *Hamilton*sche Prinzip. Während dieses aber, auf Eigenschwingungsaufgaben unmittelbar angewendet, bei eingliedrigem Ritz-Ansatz immer auf den *Rayleigh*schen Quotienten führt, muß man den mechanischen Schwinger erst einmal umdeuten, ehe es jenen andern Quotienten des *Grammel*schen Verfahrens liefert, den wir im folgenden der Kürze halber den *Grammel*schen Quotienten nennen wollen. Diese Umdeutung besteht darin, daß man dem Schwinger ein widerstandsreziprokes, ebenfalls schwingungsfähiges Gebilde mit denselben Eigenfrequenzen zuordnet[5]. Soweit man diese Methode der Schwingertransformation beherrscht, kann man also auch die in vielen technischen Anwendungen besonders vorteilhaften *Grammel*schen Gleichungen aufstellen, bzw. läßt sich damit in Zweifelsfällen nachprüfen, ob die auf üblichem Wege gewonnenen Ansätze in sich folgerichtig sind.

Im folgenden beschränken wir uns, was unwesentlich ist, auf die Herleitung des *Grammel*schen Quotienten bei eindimensionalen, einläufigen[6] Schwingern. Diese Voraussetzungen sind wesentlich, da sie durch die beabsichtigte Schwingertransformation bedingt sind. Mehrläufige Schwinger unterscheiden sich von einläufigen dadurch, daß sich ihre potentielle Energie nicht mehr mit Hilfe des Produkts aus einer Schnittkraft samt der ihr zugehörigen Verformung darstellen läßt. In diesem Sinne ist der Biegestab im Fliehkraftfeld, aber auch die radial schwingende Scheibe nicht mehr einläufig. Beide sind kinematisch noch eindimensionale Schwinger. Soweit der in solchen Fällen zusätzlich auftretende Ausdruck in der potentiellen Energie aber nur eine Korrektur darstellt — und darum handelt es sich z. B. beim Einfluß der Fliehkraft auf die Eigenfrequenzen eines Biegestabes —, kann man den mehrläufigen Schwinger näherungsweise immer als Überlagerung mehrerer einläufiger Schwinger ansehen. Auch wenn man damit auf eine Fehlerabschätzung verzichtet, so hat sich dieses Vorgehen, das auf dem Satz von *Southwell* beruht, bei technischen Problemen durchaus bewährt.

Wir werden es vorziehen, den skizzierten Gedankengang nicht in aller Allgemeinheit an einem abstrakten eindimensionalen einläufigen Schwinger, sondern anschaulicher an den Beispielen der

[1] Vgl. z. B. *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949.
[2] *E. Stiefel* und *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 1 (1950) S. 111.
[3] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 10 (1939) S. 35. — Vgl. auch *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 1. Bd. S. 177, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[4] *L. Collatz*, a. a. O. Fußn. 1, S. 203.
[5] *K. Klotter*, Ing.-Arch. 18 (1950) S. 291, insbes. S. 299.
[6] Zu diesem Begriff vgl. *R. Grammel*, Über die Lösung technischer Eigenwertprobleme, Forsch.-Hefte Stahlbau, Heft 6, S. 36, Berlin 1943.

Torsions- und Biegeschwingungen von Stäben näher auszuführen. Auf diese Weise lassen sich die Besonderheiten, die durch die verschiedenen Randbedingungen auftreten können, in ihrer Vielfalt besser darstellen. Dabei werden sich auch einige Fingerzeige dafür ergeben, unter welchen Bedingungen das *Grammel*sche Verfahren besonders zu empfehlen ist, und wann der *Rayleigh*sche Quotient den Vorzug verdient.

2. Torsionsschwingungen von Stäben. a) Stetig verteilte Drehmasse (Abb. 1). Mit der Dichte ϱ, dem polaren Flächenträgheitsmoment $I(x)$ und der Torsionssteifigkeit $C(x)$ genügen die freien Torsionsausschläge $\psi(x, t)$ und das dabei geweckte Torsionsmoment $M(x, t)$ außer gewissen Randbedingungen den Gleichungen

Abb. 1. Torsionsstab.

$$\varrho\, I(x)\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}\,, \tag{1}$$

$$M = C(x)\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{2}$$

Gleichung (1) ist der Drehimpulssatz, Gleichung (2) eine rein statische Beziehung, das Elastizitätsgesetz des Stabes. Ein solcher Torsionsstab kann insbesondere stationäre, freie Schwingungen

$$\left.\begin{aligned}\psi(x, t) &= \varphi(x)\sin\sigma t\,,\\ M(x, t) &= N(x)\sin\sigma t\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ausführen.

Auf das zu dem gegebenen Torsionsstab reziproke Schwingungsgebilde kommen wir, wenn wir als neue Veränderliche

$$\psi^* = M\,, \qquad M^* = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{4}$$

wählen. Damit schreiben sich die Gleichungen (2) und (1) um in

$$(\varrho\, I)^*\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = \frac{\partial M^*}{\partial x}\,, \tag{5}$$

$$M^* = C^*\,\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\,, \tag{6}$$

wenn man noch

$$(\varrho\, I)^* = \frac{1}{C}\,, \qquad C^* = \frac{1}{\varrho\, I} \tag{7}$$

setzt. Die so erhaltenen Gleichungen sind formal gleich gebaut wie die ursprünglichen Gleichungen, können also ebenfalls als Schwingungsgleichungen eines Torsionsschwingers angesehen werden, wenn auch die physikalischen Dimensionen andere geworden sind. So ist beim reziproken Schwinger das Maß für seine „Massenträgheit" durch die reziproke Torsionssteifigkeit des ursprünglichen Schwingers und ebenso seine „Torsionssteifigkeit" durch die reziproke spezifische Drehmasse gegeben. Diese Unstimmigkeit in den physikalischen Dimensionen ist aber unwesentlich, da man ja nur die Ausgangsgleichungen in dimensionsloser Form hätte zu schreiben brauchen, um dieser Schwierigkeit zu entgehen. So wie also (2) das statische Grundgesetz des wirklichen Schwingers und (1) seine aus dem für ihn gültigen *Hamilton*schen Prinzip folgende *Euler*sche Gleichung ist, können wir diese Betrachtungsweise auch auf die Gleichungen (5) und (6) des reziproken Gebildes anwenden, und außerdem ist klar, daß insbesondere das reziproke Gebilde dieselben Eigenfrequenzen σ wie der gegebene Schwinger hat, da es ja tatsächlich denselben Schwinger darstellt. Wir können somit, statt von den Differentialgleichungen auszugehen, diese Eigenfrequenzen auch mit Hilfe des *Hamilton*schen Prinzips, angewendet auf das reziproke Gebilde, ermitteln, sofern wir uns nur zuvor noch davon überzeugen, was bei der Transformation aus den Randbedingungen geworden ist.

b) Randbedingungen einschließlich Einzelmassen. Als einfachste Randbedingung betrachten wir zunächst die kinematische der starren Einspannung an einer Stelle $x = a$ mit $0 \leqq a \leqq l$:

$$\psi(a, t) \equiv 0\,. \tag{8}$$

Die dazu reziproke Bedingung lautet nach der ersten Gleichung (4)

$$M^*(a, t) \equiv 0\,, \tag{9}$$

und das ist die dynamische Bedingung eines freien Stabendes. Umgekehrt sieht man sofort, daß die dynamische Bedingung eines freien Stabendes

$$M(a, t) \equiv 0 \tag{10}$$

in die kinematische Bedingung der starren Einspannung

$$\psi^*(a, t) \equiv 0 \tag{11}$$

transformiert wird.

Sei allgemeiner der Stab an einer Stelle elastisch eingespannt, wobei es genügen mag, die Betrachtung für das linke Stabende $x = 0$ durchzuführen. Dann wird bei Auslenkungen $\psi(0, t)$ ein rückdrehendes Lagerreaktionsmoment geweckt, und die entsprechende Randbedingung wird mit einer positiven Federungszahl c_0 vorzeichenrichtig durch

$$M(0, t) = c_0 \psi(0, t) \tag{12}$$

angegeben. Zweimalige Differentiation nach der Zeit t liefert die entsprechende reziproke Randbedingung

$$\Theta_0^* \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{x=0} = M^*(0, t) \qquad \text{mit} \qquad \Theta_0^* = \frac{1}{c_0}, \tag{13}$$

und diese besagt, daß an diesem linken Stabende nunmehr eine Scheibe mit endlicher Drehmasse $\Theta_0^* = 1/c_0$ angebracht zu denken ist. Umgekehrt zeigt man, daß die Bedingung für eine endliche Drehmasse an einem linken Stabende

$$\Theta_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{x=0} = + M(0, t) \tag{14}$$

in die dazu reziproke Bedingung elastischer Einspannung

$$M^*(0, t) = c_0^* \psi^*(0, t) \qquad \text{mit} \qquad c_0^* = \frac{1}{\Theta_0} \tag{15}$$

übergeführt wird. Es werden also auch alle Randbedingungen beim reziproken Gebilde wieder in mechanisch sinnvolle und im Bereich der Torsion verbleibende Bedingungen umgewandelt. Die Reziprozität ist vollständig durchführbar; somit sind die Eigenfrequenzen auch am reziproken Gebilde und zwar mit Hilfe derselben Sätze wie beim gegebenen Schwinger zu ermitteln.

c) Der *Rayleigh*sche Quotient. Wendet man das *Hamilton*sche Prinzip auf stationäre Eigenschwingungen an, so kommt man zu der Variationsaufgabe[1]

$$\delta (U - \lambda K) = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \sigma^2, \tag{16}$$

wobei U die zur Amplitudenlage des Schwingers gehörige maximale potentielle, λK seine maximale Bewegungsenergie beim Durchgang durch die Null- oder Gleichgewichtslage ist. Auf Grund ihrer mechanischen Bedeutung kann man die Ausdrücke für U und K allein aus den statischen Gleichungen und den Randbedingungen bilden und dann, entsprechend dem gewählten Lösungsverfahren, die Variationsaufgabe (16) weiter behandeln. Alles für das folgende Wesentliche ist zu ersehen, wenn wir die Eigenfrequenz näherungsweise mit Hilfe eines eingliedrigen *Ritz*-Ansatzes $\Phi(x)$ für die Schwingungsamplitude bestimmen. Man gelangt so in bekannter Weise zum *Rayleigh*schen Quotienten, der im allgemeinen einen Näherungswert für das Quadrat der ersten Eigenfrequenz liefert:

$$\lambda_1 \equiv \sigma_1^2 \approx \frac{U[\Phi]}{K[\Phi]}. \tag{17}$$

Dabei braucht die Vergleichsfunktion Φ nur die geometrischen Randbedingungen für die Schwingungsamplitude zu erfüllen. Man kann also stets solche Vergleichsfunktionen angeben, da in diesen Randbedingungen der Eigenwert λ nicht auftritt.

d) Der *Grammel*sche Quotient. Übertragen wir diesen Sachverhalt auf die reziproke Schwingungsaufgabe, so erhalten wir den *Rayleigh*schen Quotienten

$$\lambda_1 \approx \frac{U^*[\Phi^*]}{K^*[\Phi^*]}. \tag{18}$$

Die Vergleichsfunktion Φ^* muß wieder nur etwaige kinematische Randbedingungen jetzt des reziproken Gebildes erfüllen; bei der Torsion wäre das lediglich die (dynamische) Bedingung für

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel* a. a. O. Fußn. 3, S. 171 f.

ein freies Stabende beim ursprünglichen Schwinger. Explizit lautet dieser Quotient, wenn wir im Beispiel auf endliche Drehmassen und elastische Lagerungen fürs erste verzichten,

$$\lambda_1 \approx \frac{\int_0^l C^* \left(\frac{d\Phi^*}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l (\varrho\, I)^* \, \Phi^{*2}\, dx} = \frac{\int_0^l \frac{1}{C^*} N^{*2}\,[\Phi^*]\, dx}{\int_0^l (\varrho\, I)^* \, \Phi^{*2}\, dx}, \tag{19}$$

und es besteht zwischen N^* und Φ^* nach (6) und den transformierten Gleichungen (3) die Beziehung

$$N^* = C^* \frac{d\Phi^*}{dx}. \tag{20}$$

Wir wollen nun zur Verbesserung des Ergebnisses eine Iteration vorschalten, indem wir nicht von einer zulässigen Vergleichsfunktion Φ^* ausgehen, sondern umgekehrt die Momentenamplitude N^* wählen und dazu nach (20) unter Berücksichtigung der Randbedingungen für Φ diese Funktion erst bestimmen. Die Ausgangsfunktion N^* kann an sich beliebig gewählt werden, da das *Hamilton*sche Prinzip nur der kinematischen, nicht der dynamischen Koordinate Bedingungen auferlegt. Wegen der nach der zweiten Gleichung (4) bestehenden Reziprozität, bei der es auf einen konstanten Faktor im *Ritz*-Ansatz nicht ankommt, wollen wir aber

$$N^* = \Phi \tag{21}$$

wählen, wo Φ wenigstens die kinematischen Randbedingungen des ursprünglichen Schwingers erfüllen soll. Damit erhalten wir aus (19) mit dem zweiten Ausdruck der rechten Seite und mit (7) und der ersten Gleichung (4)

Abb. 2. Biegestab.

$$\lambda_1 \approx \frac{\int_0^l \varrho\, I\, \Phi^2\, dx}{\int_0^l \frac{1}{C} N^2\,(x;\, \varrho\, I\, \Phi)\, dx}, \tag{22}$$

wo also $N(x;\varrho\, I\, \Phi) \equiv \Phi^*$ das aus (20) für $N^* \equiv \Phi$ durch eine Quadratur ermittelte maximale Torsionsmoment ist. Bei dieser Integration sind natürlich die dynamischen Randbedingungen des Schwingers berücksichtigt.

Der Quotient (22) ist nun gerade der vom *Grammel*schen Verfahren bei eingliedrigem Ansatz für dieses Beispiel gelieferte Quotient einschließlich des Iterationsschrittes, der sich beim *Grammel*schen Verfahren so vorteilhaft auf die Güte der Näherung auswirkt. Der *Grammel*sche Quotient erweist sich daher einfach als *Rayleigh*scher Quotient für das reziproke Gebilde, wenn man dort die Vergleichsfunktion nicht unmittelbar vorgibt, sondern nach der obigen Vorschrift aus der zu wählenden dynamischen Größe erst konstruiert. Entsprechend lassen sich die *Grammel*schen Gleichungen mit Hilfe mehrgliedriger Ansätze herleiten, und weiter läßt sich das Verfahren wegen der mechanischen Bedeutung der vorkommenden Ausdrücke U^* und K^* für jeden beliebig gestalteten Torsionsschwinger im Prinzip ansetzen. Welche Erschwerungen indessen bei seiner Durchführung auftreten können, werden wir in Ziff. 4 näher untersuchen. Zunächst möge der Gedankengang noch am Beispiel der Biegeschwingungen von Stäben erläutert werden; diese zählen auch zu den eindimensionalen einläufigen Schwingern.

3. Biegeschwingungen von schlanken Stäben. a) Stetig verteilte Stabmasse (Abb. 2). Sei $F(x)$ der Stabquerschnitt, $\alpha(x)$ die Biegesteifigkeit, $M(x, t)$ das zur Biegelinie $\eta(x, t)$ gehörige Biegemoment, so haben wir jetzt anstelle von (1) und (2) die Gleichungen

$$\varrho\, F(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \tag{23}$$

$$M = \alpha(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{24}$$

Für die stationären Eigenschwingungen gilt dabei

$$\left.\begin{aligned} \eta(x,t) &= y(x)\sin\sigma t\,, \\ M(x,t) &= N(x)\sin\sigma t\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Auf die entsprechenden Gleichungen des reziproken Gebildes kommen wir durch die Transformation

$$\eta^* = M\,, \qquad M^* = -\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,, \tag{26}$$

wodurch die Gleichungen (24) und (23) in

$$(\varrho F)^*\frac{\partial^2\eta^*}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M^*}{\partial x^2}\,, \tag{27}$$

$$M^* = \alpha^*\frac{\partial^2\eta^*}{\partial x^2} \tag{28}$$

mit

$$(\varrho F)^* = \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \alpha^* = \frac{1}{\varrho F} \tag{29}$$

übergeführt werden. Das sind wieder Gleichungen von der Form (23), (24).

b) Randbedingungen einschließlich Einzelmassen. Aus einer freien Auflagerung

$$\eta = 0\,, \qquad M = 0 \tag{30}$$

wird beim reziproken Gebilde

$$M^* = 0\,, \qquad \eta^* = 0; \tag{31}$$

das ist wieder eine freie Auflagerung. Eine starre Einspannung

$$\eta = 0\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

geht in ein freies Stabende (und umgekehrt)

$$M^* = 0\,, \qquad \frac{\partial M^*}{\partial x} = 0 \tag{33}$$

über. Beides sind Sonderfälle einer elastischen Einspannung, die mit positiven Federsteifigkeiten p und q bei einem linken Stabende $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} M &= p\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= -\,q\,\eta \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

verlangen. Die dazu reziproken Bedingungen lauten

$$\left.\begin{aligned} m^*\frac{\partial^2\eta^*}{\partial t^2} &= -\frac{\partial M^*}{\partial x} \qquad \text{mit} \qquad m^* = \frac{1}{p}\,, \\ D^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} &= M^* \qquad\quad \text{mit} \qquad D^* = \frac{1}{q}\,, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

d. h. beim reziproken Gebilde haben wir an diesem linken Stabende eine starre Scheibe von der Masse m^* und der äquatorialen Drehmasse D^* anzusetzen. Umgekehrt verwandelt sich eine solche Scheibe (m, D) reziprok in ein elastisches Lager mit den Federsteifigkeiten $p^* = 1/m$, $q^* = 1/D$, und es werden linke Stabenden in linke und rechte Stabenden in rechte übergeführt. Auch hier ist also die Reziprozität vollständig.

c) Der *Grammel*sche Quotient. Nunmehr läßt sich ohne weiteres der *Rayleigh*sche Quotient für das reziproke Gebilde ansetzen. Sehen wir vorläufig von Einzelmassen und elastischen Lagern ab, so lautet er mit irgendeiner zulässigen Vergleichsfunktion Y^* für die Biege-

amplitude y

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{\int_0^l \frac{1}{\alpha^*} N^{*2}[Y^*]\,dx}{\int_0^l (\varrho F)^* Y^{*2}\,dx}. \tag{36}$$

Schalten wir auch hier wieder einen Iterationsschritt vor, indem wir nicht Y^* wählen, sondern, ausgehend von

$$N^* = Y(x), \tag{37}$$

mit Hilfe der statischen Biegegleichung (24), also jetzt

$$\frac{d^2 Y^*}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^*} N^* = \varrho F Y, \tag{37a}$$

die Vergleichsfunktion $Y^* \equiv N(x; \varrho F Y)$ durch Quadratur ermitteln, so wird aus (36), auf die ursprünglichen Veränderlichen umgeschrieben,

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{\int_0^l \varrho F Y^2\,dx}{\int_0^l \frac{1}{\alpha} N^2(x; \varrho F Y)\,dx}, \tag{38}$$

und das ist der *Grammel*sche Quotient. Die Funktion $N(x; \varrho F Y)$ läßt sich als „Biegemoment" bei stetiger „Biegebelastung" $\varrho F Y$ deuten.

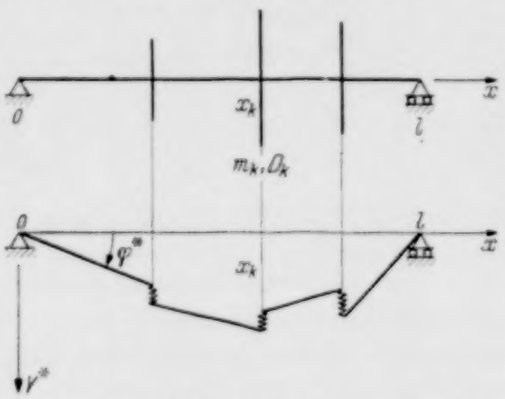

Abb. 3. Masselose Welle mit Scheiben und reziprokes Gebilde (ausgelenkt).

d) Masseloser Stab mit Einzelmassen. Es ist lehrreich, das Verfahren auf den Grenzfall einer frei gelagerten, biegeelastischen, masselosen Welle anzuwenden, die an n Stellen x_k starre Scheiben (m_k, D_k) trägt (Abb. 3). Das ihr zugeordnete reziproke Gebilde besteht aus $n+1$ starren Teilstäben von der spezifischen Masse $(\varrho F)^* = 1/\alpha$, die an den Stellen x_k derart federnd miteinander verbunden sind, daß dort Querkräfte Q_k^* und Biegemomente N_k^* gemäß

$$\left.\begin{aligned} Q_k^* &= -\frac{1}{D_k}\left(\varphi^*(x_k + 0) - \varphi^*(x_k - 0)\right), \\ N_k^* &= +\frac{1}{m_k}\left(Y^*(x_k + 0) - Y^*(x_k - 0)\right) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

geweckt werden. Gehen wir also nach (36) von einer Funktion $N^* = Y(x)$ aus, die die geometrischen Randbedingungen $Y(0) = Y(l) = 0$ befriedigt, so haben wir dazu einen an den Stellen x_k gebrochenen Polygonzug $Y^*(x)$ aus (39) mit $N_k^* = Y_k \equiv Y(x_k)$, $Q_k^* = Y_k' \equiv Y'(x_k)$ so zu ermitteln, daß für ihn $Y^*(0) = Y^*(l) = 0$ wird; oder wenn wir wieder die nichttransformierten Veränderlichen bevorzugen, so haben wir zu einer äußeren „Belastung" aus freien Momenten $m_k Y_k$ und Querkräften $D_k Y_k'$ an den Stellen x_k das Biegemoment $N(x; m_k Y_k, D_k Y_k')$, etwa über ein Seileck, zu konstruieren, und damit erhalten wir den *Grammel*schen Quotienten

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} (m_k Y_k^2 + D_k Y_k'^2)}{\int_0^l \frac{1}{\alpha} N^2(x; m_k Y_k, D_k Y_k')\,dx}. \tag{40}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch der Weg über die quellenmäßige Darstellung auf denselben Quotienten führt. Nur beiläufig sei bemerkt, daß der *Rayleigh*sche Quotient zu Eigen-

wertaufgaben bei Matrizen[1], wenigstens soweit es sich um ein Problem mechanischer Schwingungen handelt, nach der mechanischen Bedeutung seines Zählers und Nenners auch als *Grammel*scher Quotient angesprochen werden könnte. Dies erklärt sich daraus, daß in den Ausgangsgleichungen solcher Probleme eine quellenmäßige Darstellung vorliegt.

4. Besonderheiten. Es wäre nicht schwer, die an den Beispielen der Torsions- und Biegeschwingungen von Stäben durchgeführten Überlegungen auf den einläufigen, eindimensionalen Schwinger zu verallgemeinern. Eindimensional heißt hier, daß die Bewegung des schwingungsfähigen Kontinuums durch eine Gleichung der Form

$$z = z(x, t) \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{41}$$

beschrieben wird. Der Begriff einläufig beschränkt die Schwinger auf solche Kontinua, bei denen die der Verformung $z(x, t)$ entsprechende innere Beanspruchung derart ist, daß sich die spezifische potentielle Energie durch das halbe Produkt aus der Verschiebungskoordinate z und einer entsprechenden „Schnittkraft" $S(x, t)$ darstellen läßt, wobei zwischen S und z noch eine rein statische Beziehung nach Art von (2), (24) oder auch allgemeiner besteht. Eine solche Verallgemeinerung würde aber auf eine bloße Wiederholung unserer Überlegungen hinauslaufen. Wir wollen daher darauf verzichten und dafür die einzelnen Schritte unseres Vorgehens auf ihre Durchführbarkeit nachprüfen.

Die Betrachtung hat sich auf eindimensionale, einläufige Schwinger beschränkt, weil sich hier das reziproke Schwingungsgebilde ohne weiteres angeben läßt. Wie die Reziprozität bei mehrläufigen Systemen durchzuführen ist, ob eine solche überhaupt aufgestellt werden kann, muß hier unerörtert bleiben. Allererste Ansätze scheinen anzudeuten, daß die Struktur des reziproken Gebildes sich von der des gegebenen Schwingers stärker unterscheidet, vielleicht in der Richtung, daß Dimension und Läufigkeit des Schwingers einander reziprok gegenüberstehen.

Verfolgt man nun das Verfahren weiter bei einläufigen Schwingern, so bemerkt man alsbald, daß zwei Umstände seinen Gang entscheidend beeinflussen. In das Verfahren ist ein Iterationsschritt eingebaut, der für die Genauigkeit des Verfahrens wesentlich ist; in unseren Beispielen handelt es sich dabei um die Quadratur der Gleichungen (20) mit N^* (21) bzw. (37). Diese Quadratur gelingt aber ohne weiteres nur dann, wenn der Schwinger statisch bestimmt gelagert ist. Bei unbestimmter Lagerung dagegen müßte man die Integration bis zur iterierten Schwingungsamplitude weitertreiben, und dann ist es so, daß der *Grammel*sche Quotient (allgemeiner: die *Grammel*schen Gleichungen) keine Vorteile mehr bietet, da man jetzt bei gleichem Rechenaufwand den *Rayleigh*schen Quotienten für die iterierte Schwingungsamplitude ansetzen kann und damit den Eigenwert im allgemeinen noch genauer erhält.

Weiter hat man zu beachten, ob beim reziproken Gebilde neben stetig verteilter Masse auch Einzelmassen auftreten. Dann findet sich der Eigenwert in den Randbedingungen des transformierten Problems vor. Für die unmittelbare Anwendung des *Hamilton*schen Prinzips (16) bedeutet das kein Hindernis, da die Vergleichsfunktionen nur die kinematischen Randbedingungen zu erfüllen brauchen. Die gewünschte Genauigkeit der Eigenwertrechnung wird dann allerdings mehrgliedrige *Ritz*-Ansätze erforderlich machen. Beim Übergang zum reziproken Gebilde wird dagegen infolge des Iterationsschrittes der Eigenwert λ unter Umständen nicht nur in λK^* sondern auch in U^* auftreten und dadurch wird die Auflösung der Variationsgleichung

$$\delta(U^* - \lambda K^*) = 0 \tag{42}$$

nicht auf einen Quotienten führen, dessen Zähler und Nenner die seitherige Bedeutung haben. Dies bildet aber kein grundsätzliches Hindernis für die Durchführung des Verfahrens. Das Ausmaß der Rechenarbeit bei der Iteration hängt einmal davon ab, ob der Schwinger statisch bestimmt gelagert ist oder nicht, und weiter von der Art der Randbedingungen.

Als Beispiel an dem sich die verschiedenen Möglichkeiten schon ausreichend aufzeigen lassen, betrachten wir einen Torsionstab, der in $x = 0$ elastisch eingespannt ist und in $x = l$ eine starre Drehmasse Θ_l trägt (Abb. 4). Der reziproke Torsionsstab mit

$$(\varrho\, I)^* = \frac{1}{C}, \qquad C^* = \frac{1}{\varrho\, I} \tag{43}$$

besitzt dann an der Stelle $x = 0$ eine starre Drehmasse

$$\Theta_0^* = \frac{1}{c_0} \tag{44}$$

[1] Vgl. *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 155, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

und ist in $x = l$ elastisch gelagert mit

$$c_l^* = \frac{1}{\Theta_l}. \tag{45}$$

Damit wird

$$2\,U^* = \int_0^l \frac{1}{C^*}\,N^{*2}\,[\Phi^*]\,dx + \frac{1}{c_l^*}\,N_l^{*2}\,[\Phi^*] \tag{46}$$

und

$$2\,K^* = \int_0^l (\varrho\,I)^*\,\Phi^{*2}\,dx + \Theta_0^*\,\Phi_0^{*2}, \tag{47}$$

wobei für N^* und Φ^* die Gleichung (20) und die Randbedingungen

$$N_0^* = -\lambda\,\Theta_0^*\,\Phi_0^*, \qquad N_l^* = -\,c_l^*\,\Phi_l^* \tag{48}$$

gelten.

Für die Iteration gehen wir aus vom Ansatz

$$N^* = \Phi(x), \tag{49}$$

wobei die Vergleichsfunktion Φ an keinerlei Randbedingungen gebunden ist, da bei dem gewählten Schwinger (im allgemeinen) keine kinematischen Randbedingungen vorgeschrieben sind. Der Vergleich von (49) mit (48) zeigt aber sogleich, daß sich diese Iteration bei ganz beliebiger Vergleichsfunktion Φ nicht durchführen läßt, denn bei der Integration von (20) ist nur eine Integrationskonstante frei, während die Gleichungen (48) zwei verschiedene Bedingungen stellen. Darin drückt sich einfach die Tatsache aus, daß das Problem statisch unbestimmt ist. Man hilft sich hier so, daß man über Φ^* hinaus die Iteration weiter bis zur kinematischen Veränderlichen des Schwingers durchführt, indem man mit $N \equiv \Phi^*$ die Iterierte $\bar{\Phi}$ von Φ aus

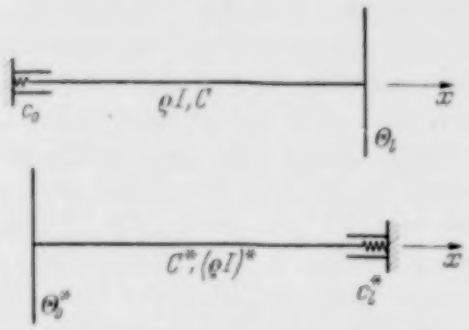

Abb. 4. Elastisch gelagerter Drehschwinger mit einer Zusatzdrehmasse und reziprokes Gebilde.

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dx} = \frac{1}{C}\,N = \frac{1}{C}\,\Phi^* \tag{50}$$

bestimmt. Wie schon bemerkt wurde, ist dann aber der mit Hilfe dieser Iterierten $\bar{\Phi}$ angesetzte *Rayleigh*sche Quotient

$$\lambda_1 \approx \frac{U\,[\bar{\Phi}]}{K\,[\bar{\Phi}]} \tag{51}$$

dem *Grammel*schen Quotient vorzuziehen.

Indessen bietet sich noch ein anderer Ausweg an, den wir noch verfolgen wollen, auch wenn über seine numerische Brauchbarkeit keine Erfahrungen vorliegen. Wir verzichten darauf, die Vergleichsfunktion Φ ganz beliebig zu wählen und untersuchen, welcher Einschränkung sie unterliegt, damit das durch (20) und (48) mit N^* (49) gestellte Problem lösbar wird. Mit einem noch unbekannten Anfangswert $\Phi_0^* \equiv \Phi^*(0)$ folgt aus (20)

$$\Phi^*(x) = \Phi_0^* + \int_0^x \frac{\Phi}{C^*}\,dx\,. \tag{52}$$

Damit kommt aus (48)

$$\Phi(0) = -\lambda\,\Theta_0^*\,\Phi_0^*, \qquad \Phi(l) = -\,c_l^*\left(\Phi_0^* + \int_0^l \frac{\Phi}{C^*}\,dx\right). \tag{53}$$

Aus der zweiten Gleichung (53) bestimmt sich Φ_0^* zum Wert

$$N(0) \equiv \Phi_0^* = -\,\frac{\Phi(l)}{c_l^*} - \int_0^l \frac{\Phi}{C^*}\,dx = -\,\Theta_l\,\Phi(l) - \int_0^l \varrho\,I\,\Phi\,dx\,, \tag{54}$$

während die erste Gleichung (53) die Ausgangsfunktionen $\Phi(x)$ durch die Forderung

$$\Phi(0) = \lambda\,\Theta_0^*\left(\frac{\Phi(l)}{c_l^*} + \int_0^l \frac{\Phi}{C^*}\,dx\right) = \frac{\lambda}{c_0}\left(\Theta_l\,\Phi(l) + \int_0^l \varrho\; I\;\Phi\,dx\right) \tag{55}$$

einschränkt.

Diese Forderung stellt eine Beziehung zwischen dem maximalen Drehimpuls des ganzen Schwingers und dem maximalen Einspannmoment her. Man könnte sie durch eine einfache Integration der Drehimpulsgleichung (1) über die Stablänge unter Beachtung von (3) und der Randbedingung (14) unmittelbar herleiten. Wir genügen ihr durch den Ansatz

$$\Phi = \mu_1\,\Psi_1 + \mu_2\,\Psi_2 \tag{56}$$

mit willkürlichen Funktionen $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, wenn wir mit noch unbekanntem Eigenwert λ

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= c_0\,\Psi_2(0) - \lambda\left[\Theta_l\,\Psi_2(l) + \int_0^l \varrho\; I\;\Psi_2\,dx\right] \equiv a_1 + \lambda\,b_1\,, \\ \mu_2 &= -\,c_0\,\Psi_1(0) + \lambda\left[\Theta_l\,\Psi_1(l) + \int_0^l \varrho\; I\;\Psi_1\,dx\right] \equiv a_2 + \lambda\,b_2 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

wählen, so daß wir also mit den durch Ψ_1, Ψ_2 eindeutig definierten Funktionen

$$\Phi_1(x) \equiv a_1\,\Psi_1 + a_2\,\Psi_2\,, \qquad \Phi_2(x) = b_1\,\Psi_1 + b_2\,\Psi_2 \tag{58}$$

auf

$$\Phi = \Phi_1 + \lambda\,\Phi_2 \tag{59}$$

kommen. Dadurch ist nach (50), (52) mit

$$N_i(x) \equiv -\int_x^l \varrho\; I\;\Phi_i\,dx - \Theta_l\,\Phi_i(l) \qquad (i = 1, 2) \tag{60}$$

auch die Iterierte

$$N(x;\varrho\; I\;\Phi) \equiv \Phi^*(x) = N_1(x) + \lambda\,N_2(x) \tag{61}$$

gefunden.

Die für die Variationsaufgabe (42) benötigten Ausdrücke U^*, K^* sind jetzt von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} 2\,U^* &\equiv \int_0^l \varrho\; I\;\Phi^2\,dx + \Theta_l\,\Phi^2(l) = A_{11} + A_{12}\,\lambda + A_{22}\,\lambda^2\,, \\ 2\,K^* &\equiv \int_0^l \frac{1}{C}\,N^2\,(x;\varrho\; I\;\Phi)\,dx + \frac{1}{c_0}\,N^2\,(0;\varrho\; I\;\Phi) = B_{11} + B_{12}\,\lambda + B_{22}\,\lambda^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Dabei bestimmen sich die Konstanten A_{ik}, B_{ik} eindeutig aus den Funktionen Φ_1, Φ_2 und zwar geben die Zeiger an, welche dieser Funktionen in die Rechnung eingehen. Wir betrachten einige Sonderfälle.

a) Einseitig starr eingespannter Stab mit freiem Ende ($c_0 = \infty$, $\Theta_l = 0$). Gleichung (55) vereinfacht sich auf die wohlbekannte kinematische Randbedingung $\Phi(0) = 0$. Wir können $\Phi_2(x) \equiv 0$ setzen. Die Aufgabe ist außerdem statisch bestimmt. Der eingliedrige Ansatz führt ohne irgendwelche Schwierigkeiten zum *Grammel*schen Quotienten.

b) Beidseitig starr eingespannter Stab ($c_0 = \infty$, $\Theta_l = \infty$). Nunmehr ist (55) nach (53) mit den beiden kinematischen Randbedingungen $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$ gleichbedeutend. Aber jetzt ist Φ_0^* aus (52) nicht mehr zu berechnen, was nur ein anderer Ausdruck dafür ist, daß die Aufgabe statisch unbestimmt ist, und zwar in einer Weise, daß das allgemein geschilderte Verfahren undurchführbar ist. Man ist genötigt, die Iterierte $\bar{\Phi}$ mit $\bar{\Phi}(0) = \bar{\Phi}(l) = 0$ nach (50) zu bestimmen und wird dann den *Rayleigh*schen Quotienten (51) auswerten.

c) Stab mit freien Enden ($c_0 = 0$, $\Theta_l = 0$). Damit die einfache Iteration gelingt, muß nach (55)

$$\int_0^l \varrho\; I\;\Phi\,dx = 0 \tag{62}$$

sein. In dem Ansatz für Φ tritt der Eigenwert nicht auf. Aus (54) folgt $\Phi_0^* = 0$. Das Problem ist statisch bestimmt, daher wird man den *Grammel*schen Quotienten bilden.

d) Stab mit einem freien Ende und einer Drehmasse am andern Ende ($c_0 = 0, \Theta_l \neq 0$). Die Bedingung (55) lautet hier

$$\Theta_l \Phi(l) + \int_0^l \varrho\, I\, \Phi\, dx = 0\,. \tag{63}$$

Aus (54) folgt eindeutig $\Phi_0^* = 0$; die Aufgabe ist statisch bestimmt. Der *Grammel*sche Quotient läßt sich sofort bilden.

e) Starr eingespannter Stab mit endlicher Drehmasse ($c_0 = \infty, \Theta_l \neq 0$). Für $\Phi(x)$ besteht nach (55) nur die kinematische Randbedingung $\Phi(0) = 0$. Da Φ_0^* (54) nicht vom Eigenwert λ abhängt, gilt dies auch von der Iterierten N (61). Wiederum kann man den *Grammel*schen Quotienten anschreiben. Der Eigenwert würde sich hier in den Randbedingungen erst störend bemerkbar machen, wenn man auch die Iterierte $\bar{\Phi}$ von Φ berechnen wollte, da für $\bar{\Phi}$ neben $\bar{\Phi}(0) = 0$ die Randbedingung

$$-\lambda\, \Theta_l\, \Phi(l) = N(l) \tag{64}$$

gilt. Wir haben hier also einen Fall, bei dem es zwar noch den *Grammel*schen, aber nicht mehr den *Rayleigh*schen Quotienten (51) gibt.

f) Stab am einen Ende elastisch eingespannt, am andern Ende frei ($c_0 \neq 0$, $\Theta_l = 0$). Es liegt der zu Fall e) reziproke Fall vor. Am zweckmäßigsten geht man also erst zum reziproken Gebilde über, nimmt es als gegebenen Schwinger und verfährt nach Fall e). Man könnte aber auch die Vergleichsfunktion Φ den Randbedingungen

$$c_0\, \Phi(0) = C(0)\, \Phi'(0), \qquad \Phi'(l) = 0 \tag{65}$$

für den ursprünglichen Schwinger anpassen und dann den *Rayleigh*schen Quotienten $U[\Phi]/K[\Phi]$ bilden. Dagegen empfiehlt es sich weniger, das *Grammel*sche Verfahren unmittelbar auf den ursprünglichen Schwinger anzuwenden. Dazu müßte die Ausgangsfunktion der Nebenbedingung

$$\Phi(0) = \frac{\lambda}{c_0} \int_0^l \varrho\, I\, \Phi\, dx \tag{66}$$

genügen. Dann hängt aber die Iterierte N (61) vom Eigenwert λ ab, so daß man mit einem eingliedrigen *Ritz*-Ansatz zu (42) eine Gleichung höheren Grades in λ bekommt, die nicht durch einen *Grammel*schen Quotienten gelöst wird. Auch darin erweist sich dieser Fall als ein Gegenstück zu Fall e), bei dem diese Erschwerung umgekehrt am *Rayleigh*schen Quotienten haftet.

g) Stab am einen Ende elastisch gelagert, am andern Ende starr eingespannt ($c_0 \neq 0, \Theta_l = \infty$). Es liegen ähnliche Verhältnisse wie bei Fall f) vor. Um das *Grammel*sche Verfahren anzuwenden, benützt man am zweckmäßigsten, daß Fall g) reziprok zu Fall d) ist.

h) Allgemeiner Fall nach Abb. 4 ($c_0 \neq 0$, $\Theta_l \neq 0$, endlich). Jetzt tritt der Eigenwert bei jedem Vorgehen in den Randbedingungen auf. Bei eingliedrigem *Ritz*-Ansatz läßt sich weder ein numerisch brauchbarer *Rayleigh*scher noch der *Grammel*sche Quotient bilden. Wie man hier mit einem solchen Ansatz noch zum Ziele kommen könnte, ist den Gleichungen (52) bis (62) zu entnehmen. In der Regel wird man aber die Variationsaufgabe (16) durch hinreichend vielgliedrige *Ritz*-Ansätze bequemer lösen können. Die Koordinatenfunktionen dieser Ansätze brauchen jetzt keinen Randbedingungen mehr zu genügen, da keine allein zu beachtenden kinematischen Bedingungen mehr vorhanden sind.

Für ein Zahlenbeispiel, bei dem man die Ergebnisse mit der strengen Lösung vergleichen kann, wählen wir einen Torsionsstab mit konstantem Querschnitt ($\varrho\, I$ = konst., C = konst.). Die Zusatzdrehmasse sei $\Theta_l = \varrho\, I\, l$, d. h. gleich der Drehmasse des Stabes, die Federungszahl bei elastischer Lagerung sei $c_0 = C/l$, also gleich der spezifischen Torsionssteifigkeit des Stabes. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Diese enthält für verschiedene Schwinger-anordnungen zunächst den exakten Bezugswert $\sigma_1 \sqrt{\varrho\, I\, l^2/C}$ der niedersten Eigenfrequenz, sodann die Vergleichsfunktion Φ, mit der die Näherungswerte samt ihrem Fehler bestimmt sind. Dabei bedeutet R den Näherungswert, der sich ergibt, wenn man mit Φ in die Variationsaufgabe (16) eingeht, also in der Regel die Wurzel aus dem *Rayleigh*schen Quotienten; der Näherungswert G ist mit dem *Grammel*schen Verfahren berechnet, bei R_{it} hat man erst zu Φ die Iterierte $\bar{\Phi}$ bestimmt und dann den *Rayleigh*schen Quotienten gebildet. Das Beispiel zu Fall h), in dem der Eigenwert in den Randbedingungen auftritt, ist zum Vergleich auch mit mehrgliedrigen *Ritz*-

Ansätzen durchgerechnet. Bei weit besserem Zahlenergebnis ist der Rechenaufwand geringer, als wenn man das in den Gleichungen (52) bis (62) geschilderte Verfahren anwendet. Dieses empfiehlt sich also im Falle h) nicht. Tabelle 1 zeigt übrigens erneut, daß das *Grammel*sche Verfahren da, wo es anwendbar ist, gegenüber dem *Rayleigh*schen (*Ritz*schen) Verfahren an Genauigkeit stark überlegen ist, worauf schon *Grammel*[1] hingewiesen hat.

Tabelle 1. *Niederste Eigenfrequenzen für Torsionsschwinger samt Näherungswerten*

Fall	$a_1\sqrt{\frac{\varrho I^2}{C}}$	$\Phi(x)$	R	G	P_{11}
a	$\frac{\pi}{2}$	x	1,7321 10,3%	1,5811 0,66%	—
b	π	$x\,(l-x)$	3,1623 0,66%	3,143 621 0,065%	3,14 181 0,007%
c	π	$x-\frac{l}{2}$	3,4641 10,3%	$\sqrt{10}$ 0,66%	—
d	2,02875	$4x-3l$	2,19 089 8,0%	2,04124 0,62%	—
e	0,86033	x	0,86603 0,66%	0,86 066 0,038%	—
h	0,55 597	$\lambda\frac{\varrho I l^2}{C}\left(2x-\frac{3}{2}l\right)-x$	2,8319 410%	0,58 183 4,65%	—
		x	0,86 603 55,8%		
		a_1+a_2x	0,55 873 0,497%	—	
		$a_1+a_2x+a_3x^2$	0,55 598 0,0018%		

5. Zusammenfassung. Zu den *Grammel*schen Gleichungen für die näherungsweise Bestimmung von Eigenwerten gelangt man auf zwei Wegen, entweder über die quellenmäßige Darstellung des Problems, d.h. über eine Integralgleichung oder über ein System von endlich vielen linearen Gleichungen, die man in bestimmter Weise umformt, — oder über die Differentialgleichung und ein besonderes Variationsprinzip, das an eine Eigenschaft der *Schwarz*schen Quotienten anknüpft. In der vorliegenden Arbeit ist ein dritter Zugang zu den *Grammel*schen Gleichungen angegeben, wenigstens für einläufige eindimensionale Schwinger: Man führt das zum Schwinger widerstandsreziproke Gebilde ein und wendet darauf das *Hamilton*sche Prinzip an. Damit ist gegenüber den ersten beiden Verfahrensweisen einerseits der Anwendungsbereich der *Grammel*schen Gleichungen erweitert, da das *Hamilton*sche Prinzip als Grundgesetz der Mechanik auf wesentlich weniger Voraussetzungen aufbaut als die mathematische Eigenwerttheorie (die dafür allerdings dann auch genauere Aussagen über den Näherungscharakter der Lösung machen kann); andererseits wird die Betrachtung auf einläufige, eindimensionale Schwinger eingeschränkt. Bei der Durchführung der Überlegungen zeigt es sich, daß durch die Art der Randbedingungen entschieden wird, welches Verfahren bei der Lösung des Eigenwertproblems im Rahmen der technischen Genauigkeitsansprüche den Vorzug verdient. Es ist dies in den meisten Fällen das *Grammel*sche Verfahren. Soweit aber Erschwerungen auftreten, kann man stets mit mehrgliedrigen *Ritz*-Ansätzen zum Ziele kommen, da Koordinatenfunktionen, wie sie vom *Hamilton*schen Prinzip gefordert werden, stets angegeben werden können.

(Eingegangen am 21. März 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *K. Zoller*, Stuttgart-Sillenbuch, Kirchheimerstr. 21.

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 401.

The Motion of Automobiles in Unbanked Curves

By **P. R. Paslay** and **A. Slibar**

1. Introduction. The motion of an automobile in a curve has been treated both experimentally and theoretically by various authors; their analyses have shown the complexity of the problem and its many close relations to other problems in automotive engineering. For many problems connected with the motion of an automobile in a curve the complete solutions are still unknown. Two such problems are the behavior of tires and the response of an automobile going over a bump. In spite of the lack of information in so many related fields, the treatment given here shows that for driving through an unbanked curve theoretical results which check existing experimental results can be obtained by an approximate theory by making use of previous experimental work.

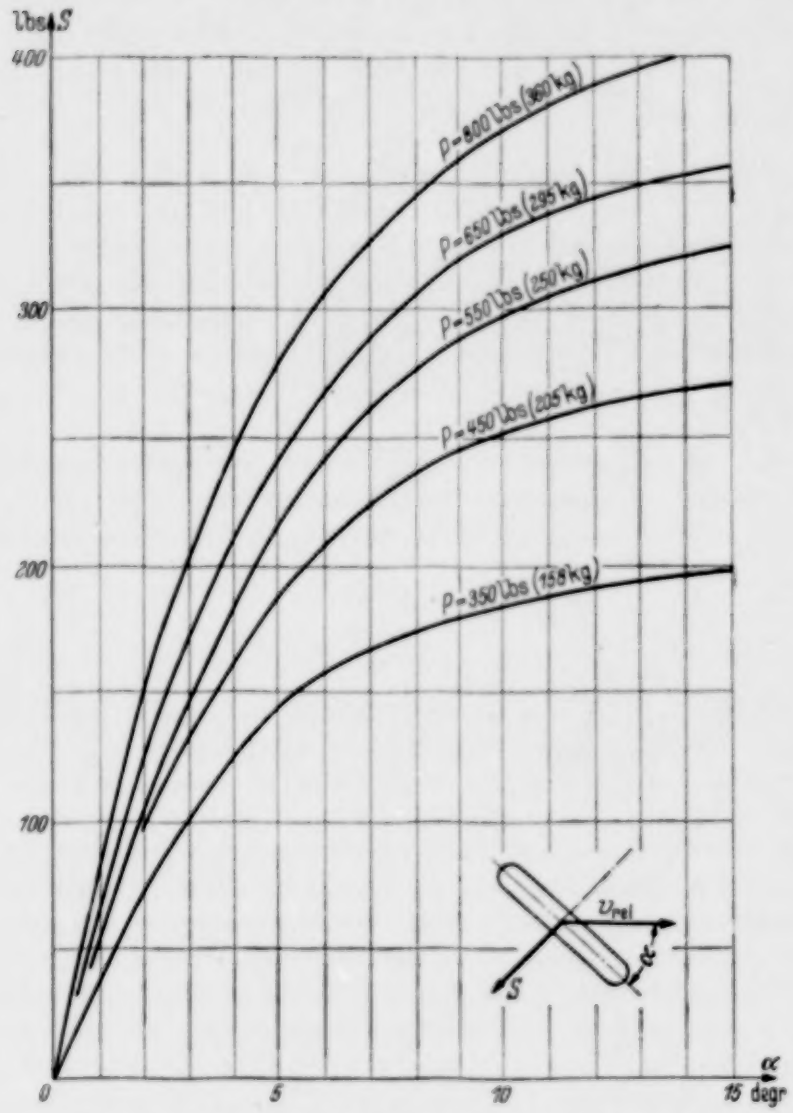

Fig. 1. The sideforce S as a function of the slip angle α of the wheel for different normal loads, from *L. Huber* [1].
Die Seitenkraft S als eine Funktion des Schräglaufwinkels α des Rades für verschiedene Normallasten nach *L. Huber* [1].

2. Review of Previous Work. The best way to review work related to this problem is to first outline the results of experimental work which involves the behaviour of tires and then to outline work which involves the response of the vehicle itself.

a) Tire Behaviour. In 1940 *L. Huber*[1] published results of a very extended experimental project dealing with the characteristics of tires. The most important results of his treatment, as regards the present work, is that in order for a tire to be able to transmit a force not acting in the plane of the wheel the plane of the wheel has to be inclined at an angle to its forward velocity. This fact was proved by *Huber* on models of tires of different sidewise stiffness even for cases of high coefficient of friction. The angle at which the plane of the wheel is inclined to the forward velocity is called the „slip angle" and is denoted by the letter α here (see Fig. 1).

For fast driving in a curve it turns out from experiments as well as from present theory, that the sideforce from the ground to the tires necessary to overcome the centrifugal force requires slip angles up to 10°. Sidewise wind forces alone during straight ahead driving can create slip angles[2] up to 5°. *Huber* found that in general stiffer tires and higher tire pressures reduce the slip angle necessary to transmit a given sideforce.

[1] *L. Huber*, Die Fahrtrichtungsstabilität des schnellfahrenden Kraftwagens, Dtsch. Kraftfahrtforschung, Heft 44, Berlin 1940.
[2] *O. Dietz* und *R. Harling*, Die Fahrlage des Kraftwagens in der Kurve, Dtsch. Kraftfahrtforschung, Heft 44, Berlin 1940.

The sideforce transmitted by a tire at a given slip angle is not proportional to the load the tire carries. The sideforce increases less than proportional to the load on the tire in this case. Fig. 1, taken from *L. Huber*, shows the relation between the sideforce S and the slip angle α for various normal loads on the tire. The reader should note that in Fig. 1 the acting sideforces are given with no dependence on the relative velocity between the tire and the ground. Fig. 2, showing the sideforce S as a function of the slip angle α for a constant load and a wide range of relative velocities, points out that the sideforce is practically independent of velocity. *Huber*'s experiments furthermore show that the curves of Fig. 1 are not appreciably changed by varying the side stiffness of the tire. As a secondary result experiments of different authors, for example [3], have shown that a self aligning torque is created by the non-uniform distribution of the pressure acting between tire and ground. This self-aligning torque may be represented by a vector perpendicular to the plane of the ground. The sense of the torque is to turn the plane of the tire toward the direction of the impressed relative velocity. Fig. 3 shows the dependence of the aligning torque on the normal load for different values of slip angles taken from *M. Olley*.

Other authors like *J. Bradley* and *R. F. Allen*[4], *R. D. Evans*[5], *A. W. Bull*[6] and *W. F. Billingsley*, *R. D. Evans*, *W. A. Hulsmit*, and *E. A. Roberts*[7] have published additional experimental results dealing with tires. The most complete reviw in English literature of all these results has been given by *M. Olley*.

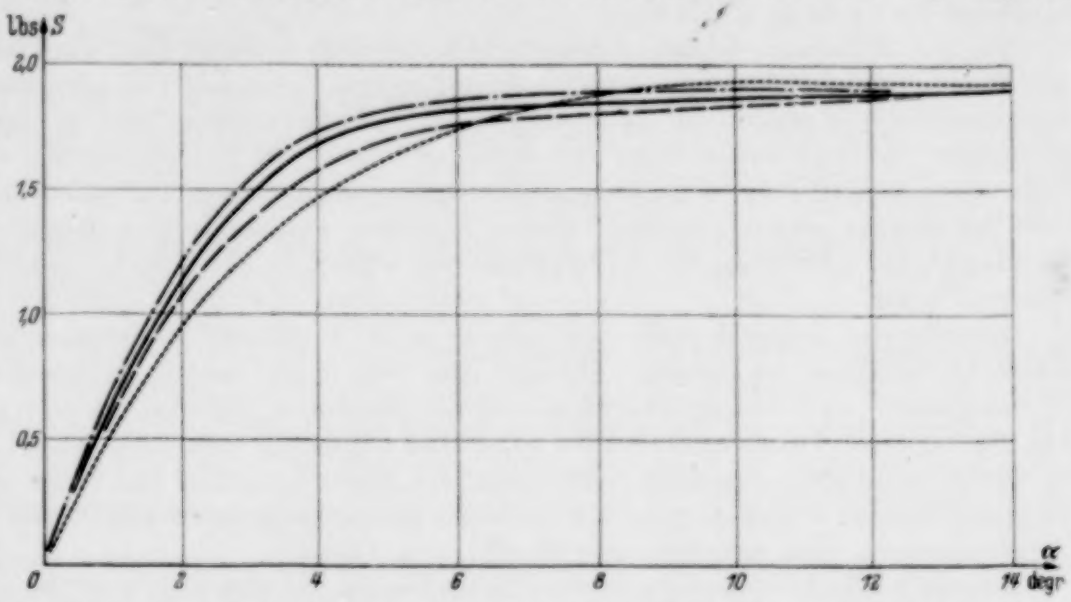

Fig. 2. The sideforce S as a function of the slip angle α for different values of relative velocity with constant normal load, from *L. Huber* [1].

The parameters of relative velocity are:

5 mph — dash dot curve,
20 mph — solid curve,
40 mph — dashed curve,
55 mph — dotted curve.

Die Seitenkraft S als Funktion des Schräglaufwinkels α für verschiedene Werte der Relativgeschwindigkeit bei konstanter Normallast nach *L. Huber* [1].

Die Parameter der Relativgeschwindigkeit sind:

≈ 8,0 km/h — strich-punktierte Kurve,
≈ 30,0 km/h — fest ausgezogene Kurve,
≈ 60,0 km/h — strichlierte Kurve,
≈ 90,0 km/h — punktierte Kurve.

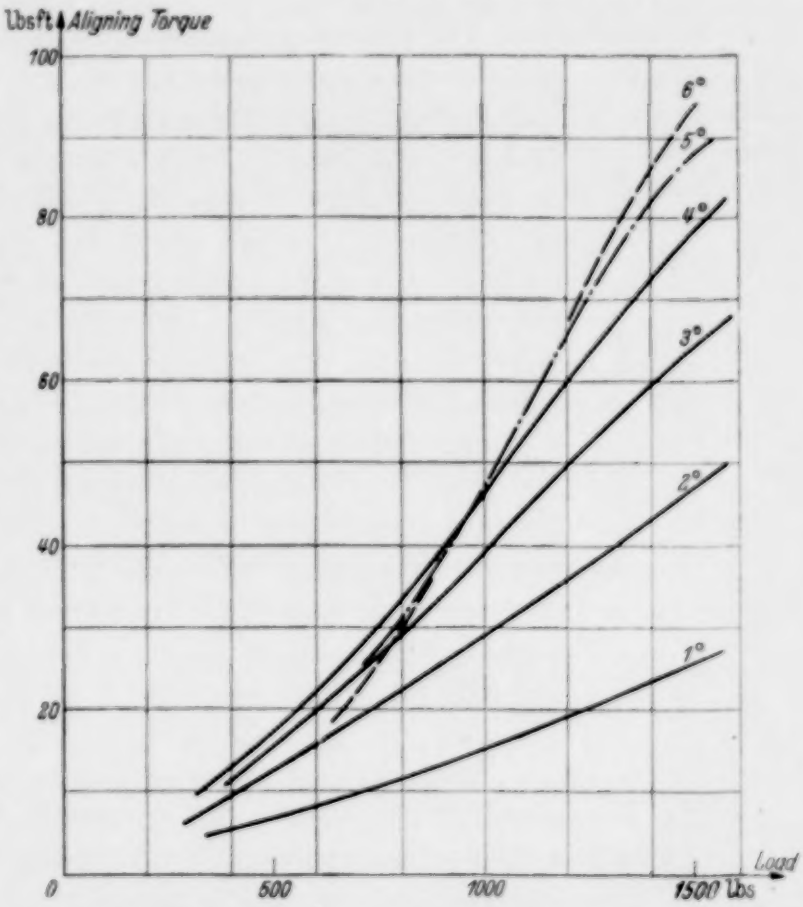

Fig. 3: The Aligning Torque T as a function of the normal load for different values of slip angles α as parameters, from *M. Olley* [3].

Das rückdrehende Moment T als Funktion der Normallast für verschiedene Werte des Schräglaufwinkels α nach *M. Olley* [3].

[3] *M. Olley*, Proc. Inst. Automobile Eng., 41 (1946), p. 147.

[4] *J. Bradley* and *R. F. Allen*, Automobile Eng., 21 (1931), p. 75.

[5] *R. D. Evans*, Properties of Tires Effecting Riding, Steering and Handling, SAE-Trans., Feb. 1935.

[6] *A. W. Bull*, J. Soc. Automotive Eng., 44 (1939), p. 344.

[7] *W. F. Billingsley*, *R. D. Evans*, *W. A. Hulsmit* and *E. A. Roberts*, Rolling Resistance of Pneumatic Tires as a Factor in Car Economy, SAE-Trans., Feb. 1942, p. 37.

b) Automobile behaviour. Experimental research on the behaviour of an automobile has been carried out by *O. Dietz* and *R. Harling*. This problem was given a theoretical treatment by *P. Rieckert* and *T. E. Schunck* [8] and additional research has been carried out lately by *Eberan v. Eberhorst* [9] and *E. Fiala* [10].

Dietz and *Harling* reported results of extended experimental work on the subject of automobiles in curves. They present various diagrams showing that the amount of skidding is of the same order of magnitude as the angles involved in steering. The results show that the amount of slipping is very sensitive to the forward velocity of the automobile for a prescribed track. This effect is well known by automobile engineers. *Dietz* and *Harling* found that tire pressure may be treated as a secondary effect. *L. Huber* pointed out that it is advantageous to have the front wheels carry more load than the rear wheels from the standpoint of more easily resisting gusts of wind.

Rieckert and *Schunck* study the motion of an automobile in a curve by considering a model which is simplified by having only one rear wheel and one front wheel mounted in the center of each axle. Linearizing the equations of motion of this model and making use of *Huber*'s results for tire characteristics they treat the following two problems: first, the steering angle required to follow a given circular track and, second, to find the track when the steering angle is prescribed as a function of time. For these two problems the stability criteria are given, no comparison with experimental results is included.

Recently *Eberhorst* compared the influence on the slip angles of the different ways of distributing the loads on front and rear wheels and of different ways of connecting the axles to the body of the car.

The scope of this work is to extend the existing theory by treating a more realistic system which, contrary to the model treated by *Rieckert* and *Schunck*, includes the effects of four wheels. As the influence of rolling of an automobile in a curve is not considered in this work we may neglect the relative motion between the axles and the body of the automobile.

3. Nomenclature. The following nomenclature is used in this treatment:

M = mass of wheels and body,

i_c = radius of gyration of wheels and body with respect to the vertical axis through center of gravity of wheels and body,

I_w = moment of inertia of each wheel about axis through center of gravity of wheel perpendicular to plane of wheel,

I_{ww} = moment of inertia of each wheel about axis in the plane of the wheel through the center of gravity of the wheel,

1, 2, 3, 4 = subscripts referring to various wheels (see Figure 4),

r, Θ, z = cylindrical coordinates,

α_i = slip angle of i-th wheel measured between the velocity of the wheel and the plance of the wheel in a horizontal plane,

r_0 = distance from center of curve to center of gravity of automobile,

Ω = angular velocity of radius r_0,

a = distance along axis of car from front axle to center of gravity of body,

b = distance along axis of car from rear axle to center of gravity of body,

c = one-half the tread (equal for front and rear),

$A = \sqrt{a^2 + c^2}$, $\quad B = \sqrt{b^2 + c^2}$,

e = vertical distance of center of gravity above the plane of the axles of the automobile,

f = radius of each wheel,

β = steering angle of front wheels,

φ = swim angle, angle between the long axis of the automobile and the velocity of the center of gravity of the body (this angle is sometimes called the side slip angle or the attitude angle),

[8] *P. Rieckert* and *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 11 (1940), p. 210.
[9] *Eberan v. Eberhorst*, Automobiltechn. Zeitschr. 55 (1953), p. 246; Automobile Revue 31 (1950), p. 17.
[10] *E. Fiala*, Automobiltechn. Z. 56 (1954), p. 5.

$\gamma_f = \tan^{-1}\frac{c}{a}$, $\gamma_r = \tan^{-1}\frac{c}{b}$,

ω_i = angular velocity of i-th wheel around its axle,

$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$ = first derivative with respect to time,

V = velocity of center of gravity of automobile,

V_i = velocity of center of gravity of i-th wheel,

D_i = drag force on the i-th wheel,

F = driving force acting in plane of road on third and fourth wheel,

P_i = vertical load supported by i-th wheel,

S_i = sideforce transmitted from the ground to the i-th wheel orthogonal to the plane of the wheel,

T_i = torque transmitted from the ground to the i-th wheel, its vector perpendicula to the ground,

$q_0, \beta_0, \bar{P}_i, F_0$ = constant mean values of the corresponding variables,

q_1, β_1, p_i, f_1 = deviation from the constant mean value of the corresponding variables,

$c', \bar{c}, k', \bar{k}$ = experimentally given constants used to represent the behaviour of the force and moment transmitted from the road to the wheel,

$\frac{k_f}{k_r}$ = ratio of the spring stiffnesses between the body and front axle and the body and the rear axle.

4. Derivation of Equations of Motion. Since this problem is mechanically very complex we have to simplify the given system quite drastically in order to get useful results with a reasonable amount of analytical work.

We assume the body of the automobile to be rigid, neglect the relative motion between the axles and the body and consider steering to be effected by the two front wheels only turning through the same angle. We furthermore assume that there is no tow-in or camber. This model moves on a horizontal flat, circular track without air resistance. Fig. 4 shows schematically the system treated.

By neglecting the relative „rolling" motion between the axles and the body we imply two things: 1) the change in radius of curvature of the center of gravity of the car due to rolling is small compared to the radius of the path, and 2) the change in load distribution on the tires due to the sidewise motion of the center of gravity of the car is small compared to its mean value. For modern automobiles the two implications given above are certainly suitable assumptions for the problem treated here.

The equations of motion for our model (Fig. 4) with its center of gravity traveling on a circular path with constant magnitude of velocity are

$$-M.\,r_0\,\Omega^2 = -(S_1+S_2)\cos(\beta+q) - (S_3+S_4)\cos q + (D_1+D_2)\sin(\beta+q) + (D_3+D_4-2F)\sin q\,, \tag{1}$$

$$0 = -(S_1+S_2)\sin(\beta+q) - (S_3+S_4)\sin q - (D_1+D_2)\cos(\beta+q) - (D_3+D_4-2F)\cos q\,, \tag{2}$$

$$Mg = P_1+P_2+P_3+P_4\,, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} Mi_c^2\ddot{q} + 2I_{zw}\ddot{\beta} = {} & S_1 A\cos(\beta+\gamma_F) + S_2 A\cos(\gamma_F-\beta) - (S_3+S_4)B\cos\gamma_r - \\ & - A[D_1\sin(\beta+\gamma_F) - D_2\sin(\gamma_F-\beta)] + B(D_4-D_3)\sin\gamma_r - (T_1+T_2+T_3+T_4)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} & (f+e)(D_1+D_2)\cos\beta - I_w(\dot{\omega}_1+\dot{\omega}_2)\cos\beta + (S_1+S_2)(f+e)\sin\beta + [D_3+D_4-2F](f+e) \\ & - I_w(\dot{\omega}_4+\dot{\omega}_3) + I_w(\omega_1+\omega_2)(\dot{q}+\dot{\beta}+\Omega)\sin\beta - (P_1+P_2)a + (P_3+P_4)b = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} & -(f+e)(D_1+D_2)\sin\beta + I_w(\dot{\omega}_1+\dot{\omega}_2)\sin\beta + (S_1+S_2)(f+e)\cos\beta + (S_3+S_4)(f+e) \\ & + I_w(\omega_1+\omega_2)(\dot{q}+\dot{\beta}+\Omega)\cos\beta + I_w(\omega_3+\omega_4)(\dot{q}+\Omega) + (P_2+P_4-P_1-P_3)c = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Since the problem is statically indeterminate one additional equation is required. We make use of the following relation:

$$\frac{(P_2 - P_1)}{(P_4 - P_3)} = \frac{k_f}{k_r} \tag{7}$$

which is derived from the fact that all four wheels must remain in contact with the ground. The effect of shock absorbers is not of primary importance and has been neglected in deriving Equation (7).

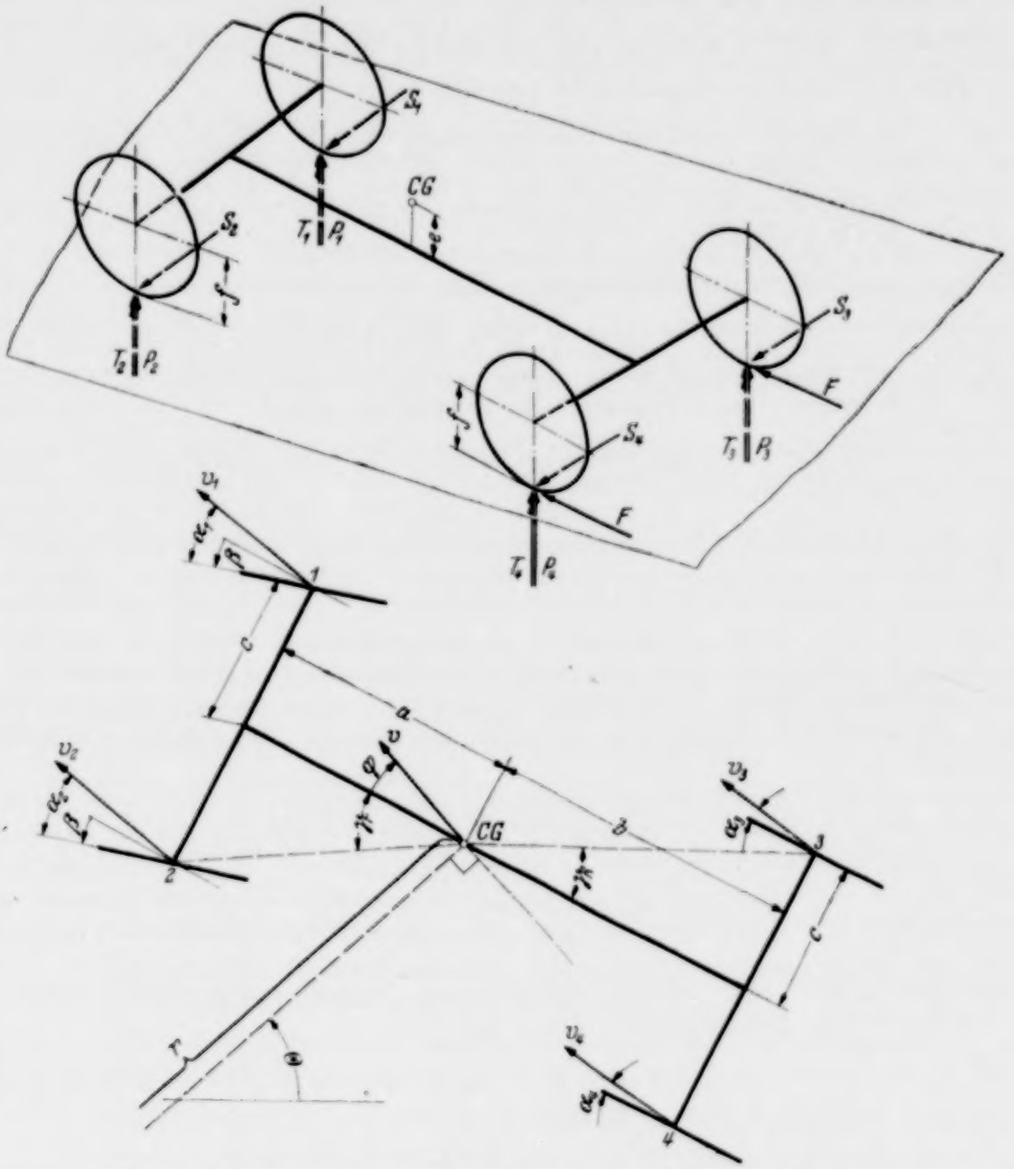

Fig. 4. Schematic diagram of the model treated. Schema des behandelten Systems.

From the geometry of the system we may write for the slip angles

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi + \beta - \tan^{-1}\left[\frac{A(\dot\varphi + \Omega)\cos(\varphi - \gamma_F)}{V - A(\dot\varphi + \Omega)\sin(\varphi - \gamma_F)}\right],\\
\alpha_2 &= \varphi + \beta - \tan^{-1}\left[\frac{A(\dot\varphi + \Omega)\cos(\varphi + \gamma_F)}{V - A(\dot\varphi + \Omega)\sin(\varphi + \gamma_F)}\right],\\
\alpha_3 &= \varphi + \tan^{-1}\left[\frac{B(\dot\varphi + \Omega)\cos(\varphi + \gamma_r)}{V + B(\dot\varphi + \Omega)\sin(\varphi + \gamma_r)}\right],\\
\alpha_4 &= \varphi + \tan^{-1}\left[\frac{B(\dot\varphi + \Omega)\cos(\varphi - \gamma_r)}{V + B(\dot\varphi + \Omega)\sin(\varphi - \gamma_r)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

and for the angular velocities of the wheels

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\cos\alpha_1}{f}\sqrt{[V + A(\dot{\varphi} + \Omega)\sin(\gamma_F - \varphi)]^2 + [A(\dot{\varphi} + \Omega)\cos(\gamma_F - \varphi)]^2}\,,\\
\omega_2 &= \frac{\cos\alpha_2}{f}\sqrt{[V - A(\dot{\varphi} + \Omega)\sin(\gamma_F + \varphi)]^2 + [A(\dot{\varphi} + \Omega)\cos(\gamma_F + \varphi)]^2}\,,\\
\omega_3 &= \frac{\cos\alpha_3}{f}\sqrt{[V + B(\dot{\varphi} + \Omega)\sin(\gamma_r + \varphi)]^2 + [B(\dot{\varphi} + \Omega)\cos(\gamma_r + \varphi)]^2}\,,\\
\omega_4 &= \frac{\cos\alpha_4}{f}\sqrt{[V - B(\dot{\varphi} + \Omega)\sin(\gamma_r - \varphi)]^2 + [B(\dot{\varphi} + \Omega)\cos(\gamma_r - \varphi)]^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Now making use of the experimental results given by *L. Huber* we may write the sideforce S_i transmitted from the ground in the following form:

$$S_i = (c' - \bar{c}\,P_i)\,P_i\,\alpha_i\,. \tag{10}$$

For the torque T_i transmitted from the road we have the relation

$$T_i = (k' + \bar{k}\,P_i)\,P_i\,\alpha_i\,. \tag{11}$$

Dealing with the automobile on a horizontal road we assume the rolling resistance and friction of the wheel bearing may be neglected so that the drag forces D_i, acting on the circumference of the wheel, may be written as

$$D_i = \frac{I_w}{f}\dot{\omega}_i\,. \tag{12}$$

Equations (1) through (12) govern the problem we are dealing with. These equations are highly non-linear. In order to get a solution of physical meaning with a reasonable amount of analytical work we have to simplify the given equations in such a way that the principal characteristics of the behavior of the system are preserved.

The non-linearity of this governing set of equations is not only due to trigonometric terms but is also introduced by applying experimental results for the sideforces S_i and torques T_i transmitted from the road to the tires.

5. Approximate Solution. A perturbation method may be applied to get the first approximative solution for the non-linear simultaneous set governing the given system. In this perturbation scheme we split the unknowns into constant mean values and small deviations from these amounts that are functions of time. For this purpose we write

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1\,, \qquad \beta = \beta_0 + \beta_1\,, \qquad P_i = \bar{P}_i + p_i\,, \qquad F = F_0 + f_1\,. \tag{13}$$

In the Equations (13) the first terms on the right side represent the constant mean values and the second terms stand for the variable parts of the unknowns. We further restrict the following quantities [11]:

$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right)_{max},\ \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{\Omega}\right)_{max},\ \left(\frac{M i_c^2 \ddot{\varphi}_1}{S_i A\,\varphi_0}\right)_{max};\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)_{max},\ \left(\frac{\dot{\beta}_1}{\Omega}\right)_{max},\ \left(\frac{M i_c^2 \ddot{\beta}_1}{S_i A\,\beta_0}\right)_{max};\ \left(\frac{p_i}{\bar{P}_i}\right)_{max},\ \left(\frac{f_1}{F_0}\right)_{max} \tag{14}$$

to have values small compared to unity.

Substituting the expressions (13) into the Equations of motion (1)—(6) and Equation (7) and carrying out a standard perturbation procedure we get the set of zero order equations which have to be satisfied by the constant mean values of the system. These equations are

$$\left.\begin{aligned}
M r_0 \Omega^2 = {} & [(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10} + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20}]\cos(\beta_0 + \varphi_0) + [(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3)\,\bar{P}_3\,\alpha_{30}\\
& + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_4)\,\bar{P}_4\,\alpha_{40}]\cos\varphi_0 + 2\,\bar{F}\sin\varphi_0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

[11] Due to the generality of this problem the actual mathematical restrictions to justify our procedure are quite complex. The conditions (14) are suitable for this treatment on the average modern passenger vehicle. The restrictions are obtained from the requirement that the contributions in the various equations from terms including φ_1, $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$, β_1, $\dot{\beta}_1$, $\ddot{\beta}_1$, p_i and f_1 are small compared to terms not dependent on the time.

$$\left.\begin{aligned} O = {} & [(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10} + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20}]\sin(\beta_0 + \varphi_0) + [(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3)\,\bar{P}_3\,\alpha_{30} \\ & + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_4)\,\bar{P}_4\,\alpha_{40}]\sin\varphi_0 - 2\,\bar{F}\cos\varphi_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} O = {} & A\,[(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10}\cos(\beta_0 + \gamma_F) + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20}\cos(\beta_0 - \gamma_F)] \\ & - B\,[(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3)\,\bar{P}_3\,\alpha_{30} + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_4)\,\bar{P}_4\,\alpha_{40}]\cos\gamma_r - (k' + \bar{k}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10} \\ & - (k' + \bar{k}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20} - (k' + \bar{k}\,\bar{P}_3)\,\bar{P}_3\,\alpha_{30} - (k' + \bar{k}\,\bar{P}_4)\,\bar{P}_4\,\alpha_{40}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$\left.\begin{aligned} O = {} & (f+e)\,[(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10} + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20}]\sin\beta_0 - (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)\,a + (\bar{P}_3 + \bar{P}_4)\,b \\ & - 2\,(f+e)\,\bar{F} \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\sin\beta_0\left\{\sqrt{r_0^2 + A^2 + 2\,r_0\,A\sin(\gamma_F - \varphi_0)}\cdot\cos\left[\gamma_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left(\frac{A\cos(\gamma_F - \varphi_0)}{r_0 + A\sin(\gamma_F - \varphi_0)}\right)\right]\right\} \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\sin\beta_0\left\{\sqrt{r_0^2 + A^2 - 2\,A\,r_0\sin(\gamma_F + \varphi_0)}\cdot\cos\left[\varphi_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left(\frac{A\cos(\gamma_F + \varphi_0)}{r_0 - A\sin(\gamma_F + \varphi_0)}\right)\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

$$\left.\begin{aligned} O = {} & (f+e)\,[(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1)\,\bar{P}_1\,\alpha_{10} + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_2)\,\bar{P}_2\,\alpha_{20}]\cos\beta_0 + (f+e)\,[(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3)\,\bar{P}_3\,\alpha_{30} \\ & + (c' - \bar{c}\,\bar{P}_4)\,\bar{P}_4\,\alpha_{40}] \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\cos\beta_0\left\{\sqrt{r_0^2 + A^2 + 2\,A\,r_0\sin(\gamma_F - \varphi_0)}\cdot\cos\left[\varphi_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left(\frac{A\cos(\gamma_F - \varphi_0)}{r_0 + A\sin(\gamma_F - \varphi_0)}\right)\right]\right\} \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\cos\beta_0\left\{\sqrt{r_0^2 + A^2 - 2\,A\,r_0\sin(\gamma_F + \varphi_0)}\cdot\cos\left[\varphi_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left(\frac{A\cos(\gamma_F + \varphi_0)}{r_0 - A\sin(\gamma_F + \varphi_0)}\right)\right]\right\} \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\left\{\sqrt{r_0^2 + B^2 + 2\,B\,r_0\sin(\gamma_r + \varphi_0)}\cdot\cos\left[\varphi_0 + \tan^{-1}\left(\frac{B\cos(\varphi_0 + \gamma_r)}{r_0 + B\sin(\varphi_0 + \gamma_r)}\right)\right]\right\} \\ & + I_w\frac{\Omega^2}{f}\left\{\sqrt{r_0^2 + B^2 + 2\,B\,r_0\sin(\varphi_0 - \gamma_r)}\cdot\cos\left[\varphi_0 + \tan^{-1}\left(\frac{B\cos(\varphi_0 - \gamma_r)}{r_0 + B\sin(\varphi_0 - \gamma_r)}\right)\right]\right\} \\ & + c\,(\bar{P}_2 + \bar{P}_4 - \bar{P}_1 - \bar{P}_3)\,, \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

$$Mg = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4\,, \tag{6a}$$

$$\frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1}{\bar{P}_4 - \bar{P}_3} = \frac{k_f}{k_r}\,. \tag{7a}$$

In the Equations (1a)—(7a) the α_{i0} are the mean values of the α_i as follows:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{10} &= \varphi_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left[\frac{A\cos(\gamma_F - \varphi_0)}{r_0 + A\sin(\gamma_F - \varphi_0)}\right], \\ \alpha_{20} &= \varphi_0 + \beta_0 - \tan^{-1}\left[\frac{A\cos(\gamma_F + \varphi_0)}{r_0 - A\sin(\gamma_F + \varphi_0)}\right], \\ \alpha_{30} &= \varphi_0 + \tan^{-1}\left[\frac{B\cos(\gamma_r + \varphi_0)}{r_0 + B\sin(\gamma_r + \varphi_0)}\right], \\ \alpha_{40} &= \varphi_0 + \tan^{-1}\left[\frac{B\cos(\varphi_0 - \gamma_r)}{r_0 + B\sin(\varphi_0 - \gamma_r)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

The eleven Equations (1a)—(8a) give the solutions for the mean constant parts α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40}, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$, $\bar{F}_1$, φ_0 and β_0. The first order equations derived from the perturbation process become quite complicated. As solving of the first order equations of the system is routine work once the equations are given and involves a large amount of algebraic and numerical work, the equations only are given in the Appendix and a typical problem has been solved below.

6. Numerical Solutions of Zero Order Equations. In order to allow a comparison of existing experimental work with the results predicted by the set of zero order equations the authors have carried out numerical calculations for a particular automobile representing a typical combination

of the different parameters characterizing the system. The automobile characteristics taken are as follows (see Fig. 4):

Mg = weight = 4000 lb = 1810 kg,

600 — 16 tires (properties given in Figures 5 and 3),

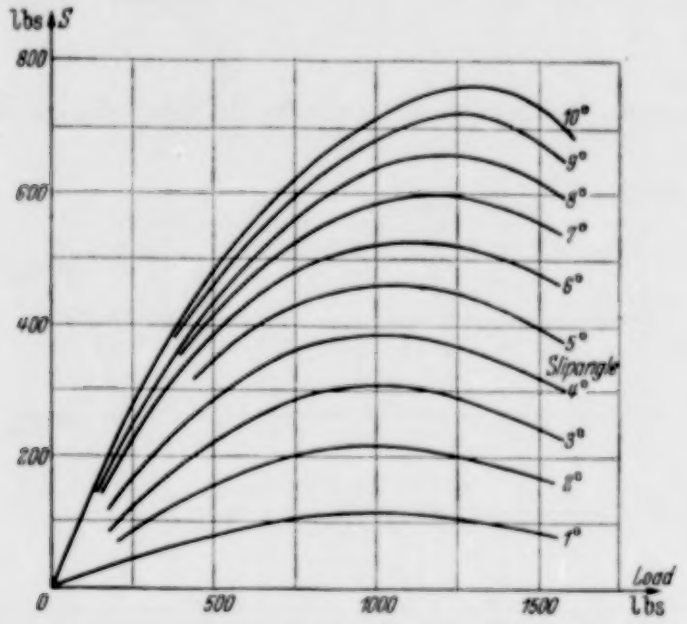

Fig. 5. The sideforce S as a function of the normal load on the tire for different values of slip angels Δ as parameters, from *M. Olley* [3].

Die Seitenkraft S als Funktion der Normallast des Fahrzeugreifens für verschiedene Werte des Schräglaufwinkels Δ nach *M. Olley* [3].

Table 1. *Calculated values of zero order solution for chosen numerical example.*
Gerechnete Werte der Näherungslösung für gewähltes Zahlenbeispiel.

V	ft/sec	100	100	100	60	60	60	30	30	30
	m/sec	30,5	30,5	30,5	18,2	18,2	18,2	9,1	9,1	9,1
r_0	ft	500	1000	∞	150	250	500	150	250	500
	m	152	305	∞	45,6	76	152	45,6	76,0	152
φ_0	°	7,3	2,54	0	11	3,5	1,2	— 0,258	— 0,39	—0,25
β_0	°	2,9	1,18	0	8	4	1,7	4,75	2,6	1,32
α_{10}	°	9,6	3,42	0	17,2	8,6	2,25	2,55	1,1	0,49
α_{20}	°	9,6	3,42	0	17,2	8,7	2,25	2,48	1,07	0,49
α_{30}	°	6,61	3,88	0	13,2	4,87	0,72	2,05	0,97	0,435
α_{40}	°	6,61	3,88	0	13,4	4,9	0,72	2,09	1	0,435
$\bar{P}_1$	lbs	1625	1369	1090	1777	1491	1291	1257	1191	1140
	kg	738	622	495	807	678	587	572	541	517
$\bar{P}_2$	lbs	491	811	1090	339	689	889	923	989	1040
	kg	223	368	495	154	313	404	418	448	472
$\bar{P}_3$	lbs	1509	1189	910	1661	1311	1111	1077	1011	960
	kg	684	540	413	754	595	504	488	459	436
$\bar{P}_4$	lbs	375	631	910	223	509	709	743	809	860
	kg	170	286	413	102	231	322	338	367	390
$\bar{F}$	lbs	193	34,6	0	244	112,3	18,25	14,6	3,85	0,90
	kg	87,5	15,7	0	112	50,8	8	6,62	1,75	0,41
Power requirement	HP	75	12,5	0	49	24,5	3,99	1,58	0,42	0,098
	PS									

I_w = mass moment of inertia for each wheel = 2 lb · ft · sec² = 0,276 kgmsec²,
a = 5 ft. = 1,52 m,
b = 6 ft. = 1,83 m,
c = 2.5 ft. = 0,764 m,
e = 1 ft. = 0,305 m,
f = 1.25 ft. = 0,382 m,
$\frac{k_f}{k_r} = 1$.

We made use of the experimental results obtained by *M. Olley* shown in Fig. 5 and 3.

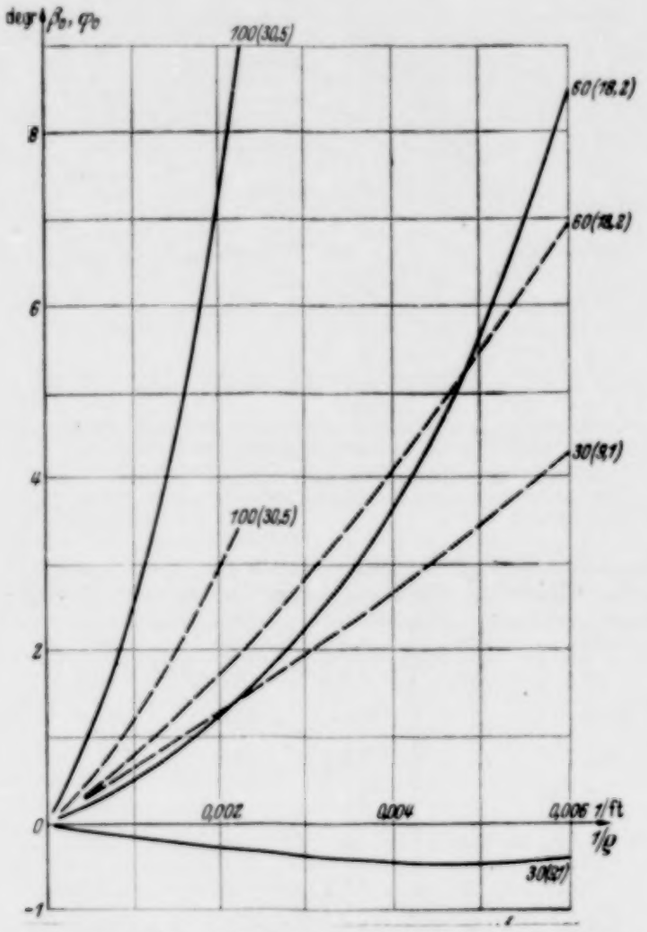

Fig. 6. The mean values of the steering angle β_0 and the swim angle φ_0 as a function of the reciprocal of the radius of the curve for various forward velocities. β_0 is given on dotted curves and φ_0 is given on solid curves. Numbers on curves refer to forward velocities in feet per second.

Die Mittelwerte des Lenkwinkels β_0 und des Schwimmwinkels φ_0 als Funktion der Krümmung der Kurve für verschiedene Werte der Fahrgeschwindigkeit. β_0 ist gegeben durch die strichlierten und φ_0 durch die voll ausgezogenen Linien. Die eingeklammerten Zahlen an den Kurven geben die Fahrgeschwindigkeit in m/sec.

Calculations were made for different driving conditions, i. e., variable amounts of speed and variable radii of curvature. It should be emphasized that we treated the motion of the automobile in an unbanked curve. The equations were solved for the unknown mean values of the slip angles $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40}$; the unknown mean value of the swim angle φ_0; the unknown mean amplitude of the steering angle β_0; the mean values $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ of the loads of the tires and furthermore for the force $\overline{F}$, transmitted from the road to the tire acting in the plane of the road. From the latter result for $\overline{F}$ the horsepower requirement to drive the automobile at the given velocity and on the given path was determined.

The results of this calculation are shown in Table 1 and in addition the most interesting results are represented by the curves in Fig. 6 and 7.

7. Comparison of Zero Order Results with Experiments and Conclusions. The results of the above calculation allow us to compare our predictions with experimental results available from *Dietz* and *Harling*. Fig. 8 shows some of the experimental results referred to. The results of *Dietz* and *Harling* are seen to be in good agreement with the theoretical results stated in Table 1. The deviations of the theoretical from the experimental results may be explained by the fact that *Dietz* and *Harling* used a different model automobile with front wheel drive in carrying out their tests than was used in our calculations.

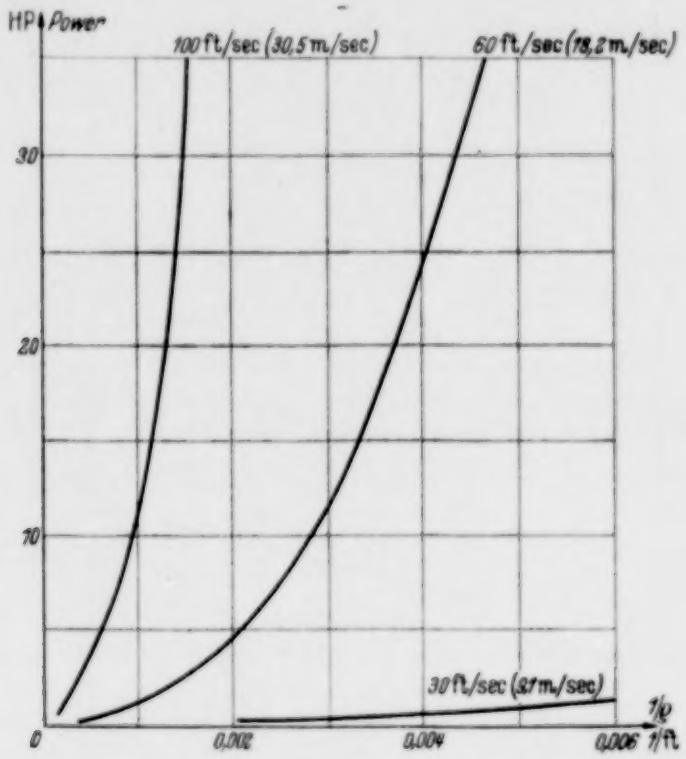

Fig. 7. Horsepower requirement for driving through a horizontal unbanked curve as a function of the reciprocal of the radius of the curve ϱ for various forward velocities.

Leistungsbedarf zum Durchfahren einer horizontalen, nicht überhöhten Kurve als Funktion der Krümmung der Kurve für verschiedene Werte der Fahrgeschwindigkeit.

The calculation proves that for high velocities and small radii of curvature the demand in power to keep the automobile going with a given speed goes up quite strikingly, a fact well known to the experienced driver. The steep rise in power with increasing driving velocity and decreasing radius clearly points out the fact of large tire wear under these driving conditions.

Appendix. This section gives the first order equations obtained from the perturbation procedure used in Equations (1) through (12). As the authors point out in the text, solving of these equations generally is routine but quite involved algebraically. These equations are included as they are certainly of interest and to the authors' knowledge have not been presented yet. The slip angles α_i and the velocities ω_i of the wheels can be written in the following form:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{10} + \beta_1 + \varphi_1 \Phi_1 + \dot{\varphi}_1 \Psi_1 , \\ \alpha_2 &= \alpha_{20} + \beta_1 + \varphi_1 \Phi_2 + \dot{\varphi}_1 \Psi_2 , \\ \alpha_3 &= \alpha_{30} + \varphi_1 \Phi_3 + \dot{\varphi}_1 \Psi_3 , \\ \alpha_4 &= \alpha_{40} + \varphi_1 \Phi_4 + \dot{\varphi}_1 \Psi_4 , \\ \omega_i &= H_i + \varphi_1 K_i + \dot{\varphi}_1 L_i . \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}\right\} \tag{1A}$$

The Equations (1A) show that by linearization we are able to split the amount of the slip angles α_i as well as of the angular velocities ω_i into parts due to the zero order solution, the steering

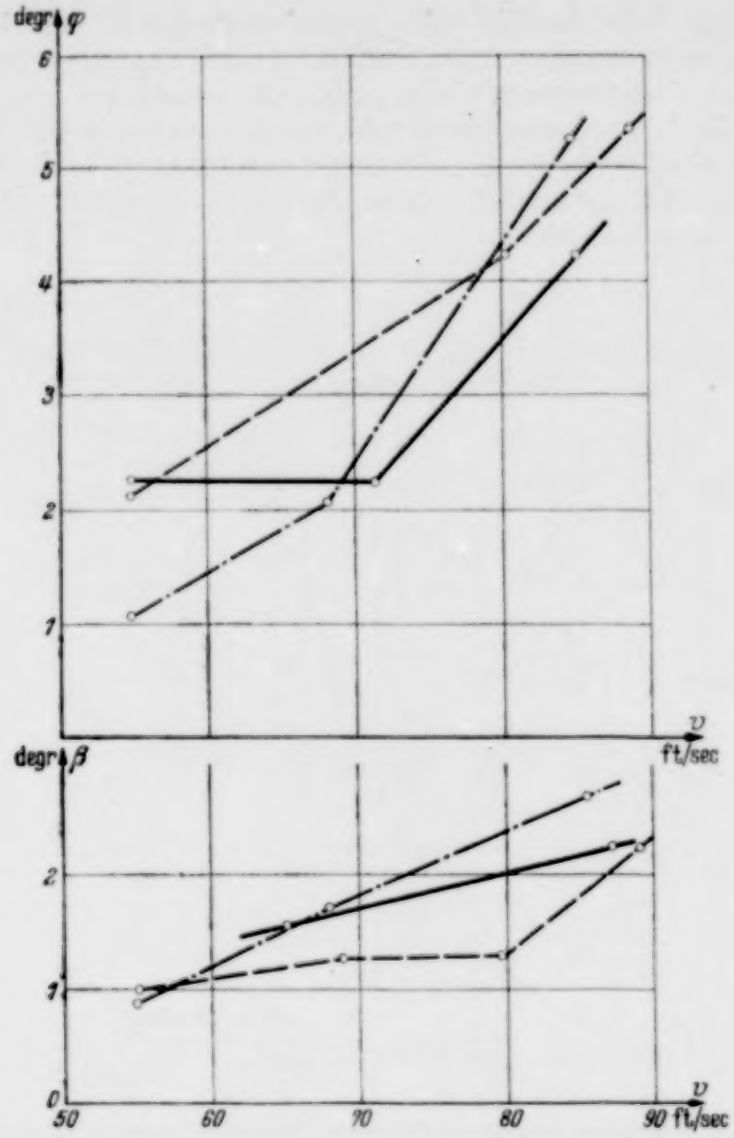

Fig. 8. Steering angle β and swim angle φ as a function of the forward velocity V for constant radius of curvature $\varrho \approx 550$ ft., from *Dietz* and *Harling* [2].

dotted curves — ordinary road tires, tire pressure = 28 psi, solid curves — snow tires, tire pressure = 28 psi, dash-dotted curves — snow tires, tire pressure = 35 psi.

Lenkwinkel β und Schwimmwinkel φ als Funktion der Fahrgeschwindigkeit V für konstanten Krümmungsradius $\varrho \approx 170$ m nach *Dietz* und *Harling* [2].

strichlierte Linie — gewöhnliche Straßenreifen, Reifendruck ≈ 2 atü, voll ausgezogene Linie — Schneereifen, Reifendruck ≈ 2 atü, strich-punktierte Linie — Schneereifen, Reifendruck $\approx 2{,}5$ atü.

angle β_1, the swim angle φ_1, and its first derivate $\dot{\varphi}_1$. In the Relations (1A) the factors Φ_i, Ψ_i, H_i, K_i and L_i are functions of the given parameters of the system and the zero order solution. Using the above abbreviations we get the following set as the first order equations:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\alpha_{10} + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\alpha_{20}\right]\sin\left(\beta_0 + \varphi_0\right)\cdot\left(\beta_1 + \varphi_1\right) + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\alpha_{30}\right. \\
& \left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\alpha_{40}\right]\left(\sin\varphi_0\right)\cdot\varphi_1 - 2\,\bar{F}\left(\cos\varphi_0\right)\cdot\varphi_1 - 2\left(\sin\varphi_0\right)\cdot f_1 \\
& + \frac{I_w}{f}\sin\left(\beta_0 + \varphi_0\right)\left[\left(K_1 + K_2\right)\cdot\dot{\varphi}_1 + \left(L_1 + L_2\right)\ddot{\varphi}_1\right] \\
& + \frac{I_w}{f}\sin\varphi_0\left[\left(K_3 + K_4\right)\dot{\varphi}_1 + \left(L_3 + L_4\right)\ddot{\varphi}_1\right] \\
& - \cos\left(\beta_0 + \varphi_0\right)\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}\,p_1 + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}\,p_2 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\right.\right. \\
& \left.\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\right]\beta_1\right\} - \cos\left(\beta_0 + \varphi_0\right)\left\{\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Phi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Phi_2\right]\varphi_1\right. \\
& \left. + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Psi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Psi_2\right]\dot{\varphi}_1\right\} - \cos\varphi_0\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_3\right)\alpha_{30}\,p_3\right. \\
& \left. + \left(c' - 2\,c\,\bar{P}_4\right)\alpha_{40}\,p_4 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Phi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Phi_4\right]\varphi_1\right\} \\
& - \cos\varphi_0\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Psi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Psi_4\right]\dot{\varphi}_1\,,
\end{aligned}
\qquad (2a)
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &+ \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\alpha_{10} + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\alpha_{20}\right]\cos\left(\beta_0+\varphi_0\right)\cdot\left(\beta_1+\varphi_1\right) + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\alpha_{30}\right.\\
&\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\alpha_{40}\right]\left(\cos\varphi_0\right)\cdot\varphi_1 + 2F\left(\sin\varphi_0\right)\varphi_1 - 2\left(\cos\varphi_0\right)f_1 + \frac{I_w}{f}\cos\left(\beta_0+\varphi_0\right)\\
&\times\left[\left(K_1+K_2\right)\dot{\varphi}_1 + \left(L_1+L_2\right)\ddot{\varphi}_1\right] + \frac{I_w}{f}\cos\varphi_0\left[\left(K_3+K_4\right)\dot{\varphi}_1 + \left(L_3+L_4\right)\ddot{\varphi}_1\right]\\
&+ \sin\left(\beta_0+\varphi_0\right)\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}p_1 + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}p_2 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\right.\right.\\
&\left.\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\right]\beta_1\right\} + \sin\left(\beta_0+\varphi_0\right)\left\{\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Phi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Phi_2\right]\varphi_1\right.\\
&\left. + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Psi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Psi_2\right]\dot{\varphi}_1\right\} + \sin\varphi_0\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_3\right)\alpha_{30}p_3\right.\\
&\left. + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_4\right)\alpha_{40}p_4 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Phi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Phi_4\right]\varphi_1\right\}\\
&+ \sin\varphi_0\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Psi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Psi_4\right]\dot{\varphi}_1\,,
\end{aligned}
\tag{3a}
$$

$$
\begin{aligned}
Mi_c^2\ddot{\varphi}_1 + 2I_{ww}\ddot{\beta}_1 = &- A\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\alpha_{10}\sin\left(\beta_0+\gamma_F\right)\beta_1 + A\left[\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}p_1\right.\\
&\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\left(\beta_1 + \varphi_1\Phi_1 + \dot{\varphi}_1\Psi_1\right)\right]\cos\left(\beta_0+\gamma_F\right) - A\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\alpha_{20}\sin\left(\beta_0 - \gamma_F\right)\beta\\
&+ A\left[\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}p_2 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\left(\beta_1 + \varphi_1\Phi_2 + \dot{\varphi}_1\Psi_2\right)\right]\cos\left(\beta_0 - \gamma_F\right)\\
&- B\cos\gamma_r\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_3\right)\alpha_{30}p_3 + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_4\right)\alpha_{40}p_4 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Phi_3\right.\right.\\
&\left.\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Phi_4\right]\varphi_1 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Psi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Psi_4\right]\dot{\varphi}_1\right\} - \frac{I_w}{f}A\\
&\times\left\{\left[K_1\sin\left(\beta_0+\gamma_F\right) + K_2\sin\left(\beta_0 - \gamma_F\right)\right]\dot{\varphi}_1 + \left[L_1\sin\left(\beta_0+\gamma_F\right) + L_2\sin\left(\beta_0 - \gamma_F\right)\right]\ddot{\varphi}_1\right\}\\
&+ \frac{I_w}{f}B\left[\left(K_4 - K_3\right)\sin\gamma_r\cdot\dot{\varphi}_1 + \left(L_4 - L_3\right)\sin\gamma_r\cdot\ddot{\varphi}_1\right] - \left(k' + 2\bar{k}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}p_1\\
&- \left(k' + 2\,\bar{k}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}p_2 - \left(k' + 2\,\bar{k}\,\bar{P}_3\right)\alpha_{20}p_3 - \left(k' + 2\,\bar{k}\,\bar{P}_4\right)\alpha_{40}p_4\\
&- \left[\left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1 + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\right]\beta_1 - \left[\left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Phi_1 + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Phi_2\right.\\
&\left. + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Phi_3 + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Phi_4\right]\varphi_1 - \left[\left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Psi_1 + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Psi_2\right.\\
&\left. + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Psi_3 + \left(k' + \bar{k}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Psi_4\right]\dot{\varphi}_1\,,
\end{aligned}
\tag{4a}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &\, I_w\frac{e}{f}\left[\left(K_1+K_2\right)\cos\beta_0\cdot\dot{\varphi}_1 + \left(L_1+L_2\right)\cos\beta_0\cdot\ddot{\varphi}_1\right] + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\alpha_{10}\right.\\
&\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\alpha_{20}\right]\left(f+e\right)\cos\beta_0\cdot\beta_1 + \left(f+e\right)\sin\beta_0\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}p_1\right.\\
&\left. + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}p_2 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\right]\beta_1\right\} + \left(f+e\right)\sin\beta_0\\
&\times\left\{\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Phi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Phi_2\right]\varphi_1 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Psi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Psi_2\right]\dot{\varphi}_1\right\}\\
&+ I_w\frac{e}{f}\left[\left(K_3+K_4\right)\dot{\varphi}_1 + \left(L_3+L_4\right)\ddot{\varphi}_1\right] + I_w\,\Omega\sin\beta_0\left[\left(K_1+K_2\right)\varphi_1 + \left(L_1+L_2\right)\dot{\varphi}_1\right]\\
&+ I_w\left(H_1+H_2\right)\Omega\left(\cos\beta_0\right)\cdot\beta_1 + I_w\sin\beta_0\left(H_1+H_2\right)\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\beta}_1\right) - 2\left(f+e\right)f_1\\
&- \left(p_1+p_2\right)a + \left(p_3+p_4\right)b\,,
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &- I_w\frac{e}{f}\sin\beta_0\left[\left(K_1+K_2\right)\dot{\varphi}_1 + \left(L_1+L_2\right)\ddot{\varphi}_1\right] - \left(f+e\right)\sin\beta_0\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\alpha_{10}\right.\\
&\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\alpha_{20}\right]\beta_1 + \left(f+e\right)\cos\beta_0\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_1\right)\alpha_{10}p_1 + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_2\right)\alpha_{20}p_2\right.\\
&\left. + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\right]\beta_1\right\} + \left(f+e\right)\cos\beta_0\left\{\left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Phi_1\right.\right.\\
&\left.\left. + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Phi_2\right]\varphi_1 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_1\right)\bar{P}_1\Psi_1 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_2\right)\bar{P}_2\Psi_2\right]\dot{\varphi}_1\right\} + \left(f+e\right)\\
&\times\left\{\left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_3\right)\alpha_{30}p_3 + \left(c' - 2\,\bar{c}\,\bar{P}_4\right)\alpha_{40}p_4 + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Phi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Phi_4\right]\varphi_1\right.\\
&\left. + \left[\left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_3\right)\bar{P}_3\Psi_3 + \left(c' - \bar{c}\,\bar{P}_4\right)\bar{P}_4\Psi_4\right]\dot{\varphi}_1\right\} + I_w\left\{-\left(H_1+H_2\right)\Omega\sin\beta_0\cdot\beta_1\right.\\
&\left. + \left(H_1+H_2\right)\cos\beta_0\cdot\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\beta}_1\right) + \Omega\cos\beta_0\left[\left(K_1+K_2\right)\varphi_1 + \left(L_1+L_2\right)\dot{\varphi}_1\right]\right\}\\
&+ I_w\left\{\left(H_3+H_4\right)\dot{\varphi}_1 + \Omega\left[\left(K_3+K_4\right)\varphi_1 + \left(L_3+L_4\right)\dot{\varphi}_1\right]\right\} + c\left(-p_1 + p_2 - p_3 + p_4\right),
\end{aligned}
\tag{6a}
$$

$$
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0\,, \tag{7a}
$$

$$
\frac{p_2 - p_1}{p_4 - p_3} = \frac{k_f}{k_r}\,. \tag{8a}
$$

One important use of this set of equations should be mentioned: the proof of the stability of the system. The zero order solution given in the previous section is only valid if the system is stable, this fact being up to now purely a matter of experience.

(Eingegangen am 9. März 1956)

Anschrift der Verfasser:
Prof. *P. R. Paslay*, Mass. Institute of Technology; currently at General Electric Company, Schenectady, N. Y., USA.
Dozent Dr. *A. Slibar*, Visiting Fellow Mass. Institute of Technology; Wien, Technische Hochschule.

Druckfehlerberichtigung

zu dem Aufsatz von *E. Mewes* in diesem Band, S. 291.

Gemäß dem letzen Satz auf Seite 291 sollen die Gleichungsnummern (2), (4), (23), (25) und (46) unterstrichen werden.